Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado
Facultad de Ciencias Matemáticas
Unidad de Posgrado

Solución débil a una ecuación elíptica con el (P,Q)-laplaciano y término no lineal dependiente del gradiente

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional

AUTOR

José Luis ACUÑA GUILLERMO

ASESOR

Dr. Eugenio CABANILLAS LAPA

Lima, Perú

2019

Referencia bibliográfica

Acuña, J. (2019). *Solución débil a una ecuación elíptica con el (P,Q)-laplaciano y término no lineal dependiente del gradiente*. Tesis para optar grado de Magíster en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional. Unidad de Posgrado, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Vicerrectorado de Investigación y Posgrado
Dirección General de Biblioteca y Publicaciones

Dirección del Sistema de Bibliotecas y Biblioteca Central

HOJA DE METADATOS COMPLEMENTARIOS

Código orcid del autor: 0000-0002-9086-9353

Código orcid del asesor: 0000-0002-8941-4394

DNI: 07252539

Grupo de investigación:

Ecuación de Kirchhoff (ECUKI)

Institución que financia parcial o totalmente la investigación:

Vicerrectorado de investigación y posgrado unmsm

Ubicación geográfica donde se desarrolló la investigación. Debe incluir localidades y coordenadas geográficas

Campus: ciudad universitaria (av. Universitaria s/n –av. Venezuela cdra 34; Lima Perú)

Coordenadas: 12°03’30’’S 77°05’00’’O

Año o rango de años que la investigación abarcó:

2018-2019

ACTA DE SUSTENTACION DE TESIS DE GRADO ACADEMICO DE MAGISTER

Siendo las 16:00 horas del día miércoles 04 de diciembre del dos mil diecinueve, en el Auditorio de la Facultad de Ciencias Matemáticas, el Jurado Evaluador de Tesis, Presidido por el Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre e integrado por los siguientes miembros, Mg. Dionicio Orlando Moreno Vega (Jurado Evaluador), Mg. Willy David Barahona Martínez (Jurado Informante) y el Dr. Eugenio Cabanillas Lapa, como Miembro Asesor, se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: «SOLUCIÓN DÉBIL A UNA ECUACIÓN ELÍPTICA CON EL (P,Q)-LAPLACIANO Y TÉRMINO NO LINEAL DEPENDIENTE DEL GRADIENTE» presentada por el Bachiller José Luis Acuña Guillermo para optar el Grado Académico de Magister en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional.

Luego de la exposición del graduando, los Miembros del Jurado hicieron las preguntas correspondientes, así como las observaciones e inquietudes acerca del trabajo de tesis, a las cuales el Bachiller José Luis Acuña Guillermo respondió con acierto y solvencia, demostrando pleno conocimiento del tema.

A continuación se realizó la calificación correspondiente, según tabla adjunta, resultando el Bachiller José Luis Acuña Guillermo aprobado con el calificativo de Diecisiete (17)

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del Grado Académico de Magister en **Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional** al Bachiller José Luis Acuña Guillermo.

Siendo las 17:30 horas, se levantó las sesión, firmando para constancia la presente Acta.

Mg. Dionicio Orlando Moreno Vega
MIEMBRO

Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre
PRESIDENTE

Mg. Willy David Barahona Martínez
MIEMBRO

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
MIEMBRO ASESOR

FICHA CATALOGRÁFICA

Jose Luis ACUÑA GUILLERMO

Solución débil a una ecuación elíptica con el (p,q)-Laplaciano y término no lineal dependiente del gradiente, (Lima) 2019.
IX, 69 pp, 29.7 cm, (UNMSM, Maestría en Matemática Aplicada, con mención en Matemática Computacional, 2019).
Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas.
1. Matemática Aplicada. UNMSM/FCM II. Título (Series).

Dedicatoria

A mis padres, a mi esposa Janett
y a mis hijos Sergio y Alvaro.

Agradecimientos

A Dios, por la vida, la salud, la fortaleza y la sabiduría que me ha dado, para concluir la maestría.

De manera especial a mi asesor de tesis, Dr. E. Cabanillas L. por haberme guiado, no solo en el desarrollo de este trabajo de posgrado, sino a lo largo de mis cursos de maestría.

Al Vicerrectorado de Investigación y Posgrado (VRIP) por el financiamiento del proyecto.

A la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

RESUMEN

Solución débil a una ecuación elíptica con el (p,q)-Laplaciano y término no lineal dependiente del gradiente

José Luis ACUÑA GUILLERMO

04 Diciembre 2019

Orientador: Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

Grado Obtenido: Magister en Matemática Aplicada

En ésta tesis, estudiamos un problema elíptico no lineal con el (p,q)-Laplaciano y que tiene un término convectivo (el término dependiente del gradiente). Probamos que bajo condiciones adecuadas para el término convectivo, el problema posee una solución débil. Además obtenemos un resultado de unicidad y presentamos un algoritmo de aproximación numérica.

PALABRAS CLAVES:

Ecuación elíptica no lineal, solución débil, (p,q)-Laplaciano, operadores pseudomonótonos.

ABSTRACT

Weak Solution for Elliptic Equation with (p,q)-Laplacian and Nonlinear Term with Gradient Dependence

José Luis ACUÑA GUILLERMO

December 04, 2019

Advisor: Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

Obtained: Master in Applied Mathematics

In this thesis, we study a nonlinear elliptic problem driven by the (p,q)-Laplacian with a convection term (the term depending on the gradient). We prove that under suitable conditions on the convection term, the problem has a weak solution. Furthermore a uniqueness results is achieved, and we present a numerical algorithm.

KEYWORDS:

Nonlinear elliptic equation, weak solution, (p,q)-Laplacian, pseudomonotone operators.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Al estudiar fenómenos del mundo real, por ejemplo en diseño de reacciones químicas (ver [15]) aparecen naturalmente ecuaciones denominadas sistemas de reacción-difusión del tipo

$$u_t = div\,(K\,(u)\,\nabla u) + f\,(x, u, \nabla u) \tag{1.1}$$

donde

$$K\,(u) = \left(|\nabla u|^{p-2} + \mu\,|\nabla u|^{q-2}\right).$$

En estos modelos, u generalmente describe la concentración, el primer término de la derecha de (1.1) es la difusión, el coeficiente de difusión $K\,(u)$ es la reacción y f se refiere a fuentes externas y procesos de perdida.

El estado estacionario asociado a (1.1) es una ecuación elíptica del tipo (p, q) $-$Laplaciano con término no lineal dependiente del gradiente.

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta_p u - \mu\Delta_q u = f\,(x, u, \nabla u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{1.2}$$

donde

$$\Delta_p u = div\left(|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\right) \quad \text{y} \quad \mu \geq 0.$$

Al no tener una estructura variacional, se presenta el incoveniente de obtener estimativas a priori usuales, además de ser un obstáculo a la aplicación directa de las principales técnicas variacionales utilizadas para hallar soluciones en problemas elípticos. La dificultad para obtener existencia de soluciones es aún mayor si el operador asociado al sistema es la suma de dos operadores no lineales diferentes.

Los sistemas elípticos del tipo (p,q) $-$Laplaciano también aparecen en el modelamiento de diversos fenómenos en Ciencias Aplicadas como Biofísica (ver [16]) y Física de Plasmas (ver [17]). Típicamente en aplicaciones químicas y biológicas, el término $f(x,u,\nabla u)$ en (1.1) tiene una forma polinomial con respecto a la concentración u. En este sentido la investigación de los sistemas del tipo (p,q) $-$Laplaciano con término no lineal dependiente del gradiente, como el considerado en nuestro trabajo, es sumamente importante.

Nuestro objetivo consiste en probar resultados de existencia y unicidad de la solución débil del problema (1.1). Como las técnicas variacionales usuales no son aplicables, así que hemos optado por la aplicación de una generalización de la teoría de operadores monótonos. Esta tesis se basa en el artículo de D. Averna, D. Motreanu, E. Tornatore [14]; explicamos en detalle la metodología usada por los autores en la resolución de estos problemas, adicionalmente estudiamos condiciones para obtener unicidad de la solución y mostramos una aproximación numérica.

Diversos autores han trabajado en la investigación de (1.2). Cuando $f(x,u,\nabla u) \equiv g(x,u)$, es decir, cuando la fuente f no depende del gradiente, la ecuación adopta la forma

$$-\Delta_p u - \mu\Delta_q u = g(x,u). \tag{1.3}$$

Cuando $p = q$, la ecuación (1.3) se vuelve

$$-\Delta_p u = \hat{g}(x,u),$$

que ha sido investigada por ejemplo en [1], [2].

Si $q = 2$, la ecuación (1.3) es del tipo:

$$-\Delta_p u - \mu\Delta u = g(x,u)$$

que para $p \geq 2$ tiene un interés geométrico y un significado físico en la teoría de fluidos no Newtonianos, para $p > 2$ (medios dilatantes), y para $1 < p < 2$ (pseudoplásticos) ver [3], [4]. También nos referimos a [5] para una aplicación a las ondas solitarias.

En general, para $1 < q$, $p \neq q$, hay pocos trabajos. Por ejemplo en [6], se prueba la existencia de soluciones no triviales, para $g(x,u)$ que decae polinomialmente en $\mathbb{R}^N$.

En [7], se tiene un resultado similar, pero con la no linealidad de $g(x,u)$ del tipo cóncavo-convexo, en dominios acotados; en [8] los autores prueban existencia y unicidad con $g(x,u)$ de exponente crítico, para un dominio acotado.

También podemos mencionar [9], [10], [11] para resultados similares a los mencionados.

Pocos autores han investigado la ecuación (1.2), cuando la fuerza externa tiene la forma $f = f(x,u,\nabla u)$, esto es, que depende de u y ∇u (para $p \neq q$). En [12] los autores, usando la teoría del grado para un tipo especial de operadores monótonos ("quasimonótonos") demuestran la existencia de soluciones débiles en espacios de Sobolev de exponente variable.

La estructura de nuestro trabajo es como sigue. En el capítulo II presentamos los resultados básicos del análisis funcional, teoría de la medida, espacios de Sobolev y la teoría generalizada de operadores monótonos. En particular probamos un teorema importante sobre operadores pseudomonótonos: El Teorema de Brézis (3.0.1). El capítulo III es el corazón del trabajo, aquí exponemos en detalle el teorema fundamental de existencia de la solución débil del problema (1.2), vía la teoría de operadores pseudomonótonos. También probaremos la unicidad de la solución. Concluímos la tesis con el capítulo IV, bosquejando un algoritmo de aproximación numérica de la solución de (1.2).

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Espacio de Banach

Definición 2.1.1. *Una sucesión* $\{u_n\}_{n\geq 1}$ *en un espacio normado* $(V, \|\|_V)$ *es llamado sucesión de Cauchy, si para* $\varepsilon > 0$, *existe un entero* N, *tal que se cumple* $\|u_m - u_n\|_V < \varepsilon$ *para* $m, n > N$. *Decimos que* V *es completo y ademas, un espacio de Banach, si para cada sucesión de Cauchy en* V *converge a algún límite en* V.

Definición 2.1.2. *Sean* $(V, \|\|_V)$ *y* $(W, \|\|_W)$ *dos espacios normados sobre el mismo cuerpo. Decimos que el operador* $A : V \longrightarrow W$ *es acotado si lleva conjuntos acotados de* V *en conjuntos acotados de* W.

Definición 2.1.3. *Sean* $(V, \|\|_V)$ *y* $(W, \|\|_W)$ *dos espacios normados, entonces el operador* $A : V \longrightarrow W$ *es compacto si*

- A *es continuo*
- A *lleva conjuntos acotados* $U \subset V$ *en conjutos relativamente compactos, i.e.* $\overline{A(U)}$ *es compacto.*

Definición 2.1.4. *Sean* $(V, \|\|_V)$ *y* $(W, \|\|_W)$ *dos espacios normados sobre el mismo cuerpo. Decimos qu la aplicación lineal* $L : V \longrightarrow W$ *es acotado si existe una constante* $M > 0$ *tal que*

$$\|L(v)\|_W \leq M \|v\|_V \qquad \forall v \in V \tag{2.1}$$

Observación 1. *Es fácil probar que una aplicación* $L : V \longrightarrow W$ *es acotada si y sólo sí es continua. Denotemos* $\mathcal{L}(V, W)$ *como el espacio de las aplicaciones lineales y acotadas de* V *a* W*. Para cada* $L \in \mathcal{L}(V, W)$*, sea*

$$\|L\|_{\mathcal{L}(V,W)} = \text{ínf}\left\{c \geq 0 : \|L(v)\|_W \leq c\,\|v\|_V\,, \quad \forall v \in V\ \right\}$$

Proposición 2.1.1. $\|.\|_{\mathcal{L}(V,W)}$ *es una norma en* $\mathcal{L}(V, W)$*.Ademas, si* $(W, \|.\|_W)$ *es un espacio de Banach, entonces* $\left(\mathcal{L}(V, W), \|.\|_{\mathcal{L}(V,W)}\right)$ *es también un espacio de Banach.*

Definición 2.1.5. *Sea* V *un espacio normado. Definimos el dual de* V *(también espacio normado, denotado por* V^**) que es el espacio de la funcionales lineales y acotadas en* V *tal que*

$$f : V \longrightarrow \mathbb{R} \text{ es lineal y } \quad \|f\|_{V^*} = \sup_{\|x\|\leq 1}\{|f(x)|\} < \infty \tag{2.2}$$

Podemos ver que $V^* := \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$, donde $f : (V, \|.\|_V) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|)$.

Definición 2.1.6. *Sea* V *un espacio normado y sea* V^* *su correspondiente espacio dual. El doble dual* V^{**} *es el dual de* V^**, con la norma*

$$\|g\|_{V^{**}} := \sup_{f\in V^*, \|f\|_{V^*}\leq 1}\{|\langle g, f\rangle|\} \qquad \forall g \in V^{**}$$

Hay una inyección canónica $J : V \longrightarrow V^{**}$ definida como sigue: dado $v \in V$, la aplicación $f \longmapsto \langle f, v\rangle$ es un funcional lineal continuo en V^*, por eso es un elemento de V^{**}, el cual es denotado por Jv. Luego, tenemos

$$\langle Jv, f\rangle_{V^{**},V^*} = \langle f, v\rangle_{V^*,V} \qquad \forall v \in V, \quad \forall f \in V^*$$

Como $|Jv(f)| \leq \|f\|_{V^*}\|v\|_V$ se tiene

$$\|Jv\|_{V^{**}} \leq \|v\|_V$$

Por el teorema de extensión de Hahn-Banach, tenemos que para cualquier $v \in V$, podemos encontrar $f \in V^*$ tal que $\|f\|_{V^*} = 1$ y $f(v) = \|v\|_V$. Así, J es una isometría. Si J es surjectivo, decimos que V es reflexivo.

2.1.1. Topología débil

Definición 2.1.7. *La **topología débil** es la topología inicial de un espacio normado con respecto a su dual continuo V^*. Es decir, es la topología más fuerte en V que hace que los elementos de V^* sean continuos.*

Para $f \in V^*$

$$\varphi_f : \underset{v}{V} \underset{\longmapsto}{\longrightarrow} \underset{\varphi_f(v)=\langle f,v\rangle}{\mathbb{R}}$$

tenemos así una familia de aplicaciones $\{\varphi_f\}_{f\in V^*}$. Denotemos con $\varrho(V,V^*) = \tau_W$ la topología débil (es decir, la menos fina que hace continuas a los φ_f) generada por las $\{\varphi_f\}_{f\in V^*}$

2.1.2. Convergencia débil

Definición 2.1.8. *Sea V un espacio normado y $(x_\nu)_{\nu\geq 1}$ una sucesión en V y $x \in V$. Decimos que $(x_\nu)_{\nu\geq 1}$ converge débilmente a x (en V) denotado*

$$x_\nu \rightharpoonup x$$

si:

$$\langle f, x_\nu\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle\,, \quad \forall f \in V^* \;\;(\text{ en } \mathbb{R})$$

Teorema 2.1.1 (Kakutani)**.** *Sea V un espacio de Banach. Entonces V es reflexivo si y sólo sí*

$$B_V = \{u \in V : \|u\| \leq 1\}$$

es compacta en la topología débil.

Teorema 2.1.2 (Eberlein-$\breve{S}$mulian)**.** *Un espacio de Banach V es reflexivo si y sólo sí cada sucesión acotada en V tiene una subsucesión el cual converge débilmente a un elemento en V.*

2.2. Teoría de Distribuciones

Dados

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, \quad z = (z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$$

Denotamos

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n, \qquad z^\alpha = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} ... z_n^{\alpha_n}$$

$$D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} = \text{Derivada de orden } \alpha$$

Observación 2.

Si $\alpha = (0,0,0,...,0)$ *entonces* $D^0 u = u$, *para toda función* u.

Si $\alpha = (0,...,0,\underbrace{1}_{i},...,0)$ *denotamos* $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ *derivada parcial con relación a la variable* x_i.

$\mathcal{D}(\Omega)$ *es llamado el espacio vectorial de la funciones de prueba.*

Definición 2.2.1. *Una distribución sobre* Ω, *es una forma lineal* $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, *y continua en el sentido de la convergencia definida en* $\mathcal{D}(\Omega)$.

T *es continua, equivale a que si*

$$\varphi_\nu \longrightarrow 0 \text{ en } \mathcal{D}(\Omega), \text{ entonces } \langle T, \varphi_\nu \rangle \longrightarrow 0 \text{ en } \mathbb{R}.$$

Denotamos por

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T \text{ distribución sobre } \Omega\}$$

el cual es un espacio vectorial.

Definición 2.2.2 (Convergencia)**.**

$$T_\nu \longrightarrow 0 \quad en \quad \mathcal{D}'(\Omega) \qquad si \qquad \langle T_\nu, \varphi \rangle \longrightarrow 0 \quad en \quad \mathbb{R}, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

2.2.1. Derivada de una distribución

Definición 2.2.3. *La derivada de orden* α *de* T *es el funcional lineal* $D^\alpha T$ *definida por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^\alpha \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

2.3. Espacios de Lebesgue

Los espacios de Lebesgue y sus resultados asociados desempeñarán un papel destacado en este trabajo, ya que es un concepto esencial en el marco de los espacios de Sobolev.

2.3.1. Espacios Medibles

Definición 2.3.1. *Un $\sigma-$álgebra en un conjunto Ω es una familia ξ de subconjuntos de Ω que satisface las siguientes propiedades:*

(a) ϕ, $\Omega \in \xi$.

(b) *Sea $A \in \xi$, entonces* $A^C := \Omega - A \in \xi$.

(c) *Si $A_n \in \xi$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \xi$.

En este caso, el par (Ω, ξ) es llamado espacio medible. Cada elemento de $\sigma-$álgebra es llamado conjunto medible.

Definición 2.3.2 (Medida)**.** *Una medida en un espacio medible (Ω, ξ) es una función $\lambda : \xi \longrightarrow [0, \infty[$ que satisface las siguientes condiciones:*

(a) $\lambda(\phi) = 0$.

(b) *Si $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos de ξ, entonces*

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$$

La medida λ es finita si $\lambda(\Omega) < \infty$, y se dice que es $\sigma-$finita si existen conjuntos $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ en ξ tales que $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\lambda(A_n) < \infty$ para todo n. La terna (Ω, ξ, λ) es llamado ***espacio de medida.***

Definición 2.3.3. *Sea (Ω, ξ, λ) un espacio de medida con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, y λ denota la medida de Lebesgue. Para $1 \leq p < \infty$, sea*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \quad \textit{es medible y} \quad \left(\int_{\Omega} |f|^p \, d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Con norma definida por

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^p \, d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}$$

y

$$L^{\infty}(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \quad \textit{es medible} \; \exists C \; \textit{tal que} \; |f(x)| \leq C \; \textit{c.s. en} \; \Omega \},$$

con norma definida por

$$\|f\|_{\infty} = \text{ínf}\left\{\alpha > 0, \lambda\left(\{x \in \Omega : |f(x)| \geq \alpha\}\right)\right\}.$$

Se puede demostrar que $L^p(\Omega)$ *y* $L^{\infty}(\Omega)$ *son espacios normados.*

Teorema 2.3.1 (Fisher-Riesz). $L^p(\Omega)$ *es un espacio de Banach para* $1 \leq p \leq \infty$.

Demostración.- Ver [1]

Teorema 2.3.2. $L^p(\Omega)$ *es reflexivo para cualquier* $1 < p < \infty$.

Demostración.- Ver [1]

Teorema 2.3.3. $L^p(\Omega)$ *es separable para cualquier* $1 \leq p < \infty$.

Demostración.- Ver [1]

Teorema 2.3.4 (Representación Riesz). *Sea* $\phi \in (L^p(\Omega))^*$, *donde* $1 < p < \infty$. *Entonces, existe un unico* $u \in L^{p'}(\Omega)$ *(donde* p' *es la conjugada de* p, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$*) tal que*

$$\langle \psi, f \rangle = \int_{\Omega} u f d\lambda \quad \forall f \in L^p(\Omega) \;\; y \;\; \|u\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|\psi\|_{(L^p(\Omega))^*}$$

Demostración.- Ver [1]

Observación 3. *Este resultado puede ser usado para probar la existencia de una isometría entre* $(L^p(\Omega))^*$ *y* $L^{p'}(\Omega)$, *asi podemos identificar estos dos espacios normados* $\left((L^p(\Omega))^* = L^{p'}(\Omega)\right)$. *Usando el Teorema de representación de Riesz, podemos también identificar* $(L^1(\Omega))^*$ *con* $L^{\infty}(\Omega)$ $\left((L^1(\Omega))^* = L^{\infty}(\Omega)\right)$.

2.4. Algunos resultados sobre convergencia

Proposición 2.4.1.

i) Cualquier sucesión convergente también converge en medida casi siempre.

ii) Cualquier sucesión convergente en $L^1(\Omega)$ *también converge en medida.*

iii) Cualquier sucesión convergente en medida, admite una subsucesión convergente casi siempre.

Proposición 2.4.2. *Cada sucesión convergente* $u_n \longrightarrow u$ *en* $L^p(\Omega)$ *tiene una subsucesión que converge puntualmente* $u_{n_k}(x) \longrightarrow u(x)$ *para casi todo punto* $x \in \Omega$. *Además, existe un* $h \in L^p(\Omega)$, *donde* $h(x) \geq 0$ *y* $|u_{n_k}(x)| \leq h(x)$ *para casi todo punto* $x \in \Omega$.

DEMOSTRACIÓN.- Ver [1]

Teorema 2.4.1. *Sea* (X, ξ, λ) *un espacio de medida. Un conjunto* $Y \subset L^1(\Omega)$ *es llamado uniformemente integrable si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un correspondiente* $\delta > 0$ *tal que*

$$\left| \int\limits_E f d\lambda \right| < \varepsilon \tag{2.3}$$

cuando $f \in Y$ *y* $\lambda(E) < \delta$.

DEMOSTRACIÓN.- Ver [22]

2.4.1. Teorema de convergencia de Vitali

Teorema 2.4.2. *Sea* (X, ξ, λ) *un espacio de medida. Si*

- $\lambda(X) < \infty$,
- $\{f_n\}_{n \geq 1}$ *es uniformemente convergente,*
- $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *casi siempre, cuando* $n \longrightarrow \infty$,
- $|f(x)| < \infty$ *casi siempre,*

entonces $f \in L^1(X)$ *y*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int\limits_X |f_n - f| \, dx = 0. \tag{2.4}$$

DEMOSTRACIÓN.- Ver [22]

2.5. Espacios de Sobolev

Los espacios de Sobolev, que se presenta a continuación, tiene una gran importancia en el desarrollo de la investigación para probar la existencia de soluciones débiles para los problemas de valor de frontera elípticos que describiremos. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio abierto y $\Gamma := \partial\Omega$ la frontera.

2.5.1. Derivada Débil

Consideremos el multi-indice α, supongamos que $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ y

$$\int\limits_{\Omega} u(x)\, \nabla^{\alpha}\psi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega} v(x)\, \psi(x)\, dx \quad \text{para todo} \quad \psi \in C_c^{\infty}(\Omega)$$

Entonces v es la $\alpha^{th}-$derivada débil de u en Ω y lo denotamos con $\nabla^{\alpha}u$.

Para mostrar que la derivada clásica de u es tambén derivada débil, asumiremos que u es suave. Entonces por integración por partes tenemos

$$\int\limits_{\Omega} u(x)\, \nabla^{\alpha}\psi(x)\, dx = \int\limits_{\Omega} (-1)^{|\alpha|}\, \nabla^{\alpha}u(x)\, \psi(x)\, dx, \text{ para cada } \psi \in C_c^{\infty}(\Omega).$$

A continuación, se proporciona una definición general de Espacio de Sobolev, consideraremos solo el caso para k =1

Definición 2.5.1. *Para $1 \leq p \leq \infty$ y $k \in \mathbb{N}$, definimos el espacio de sobolev como:*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \nabla^{\alpha}u \in L^p(\Omega) \quad \textit{para todo } |\alpha| \leq k \; \} \tag{2.5}$$

Si $u \in W^{k,p}(\Omega)$ entonces se define su norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha| \leq k} \|\nabla^{\alpha}u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} & si \;\; 1 \leq p < +\infty \\ \max\limits_{|\alpha| \leq k} \|\nabla^{\alpha}u\|_{L^{\infty}(\Omega)} & si \; p = +\infty \end{cases} \tag{2.6}$$

Definición 2.5.2. *El espacio $W_0^{k,p}(\Omega)$ es la clausura de $C_c^{\infty}(\Omega)$ en $W^{k,p}(\Omega)$, con respecto a la norma $\|.\|_{W^{k,p}(\Omega)}$, donde $1 \leq p < \infty$*

Observación 4. *Si $p = 2$ entonces $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$*

Las siguientes son propiedades de la derivada débil.

Supongamos que $u, v \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$ y $|\alpha| \leq k$. Se sigue entonces que

- $\nabla^{\alpha}u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$ *y* $\nabla^{\beta}(\nabla^{\alpha}u) = \nabla^{\alpha+\beta}u$ *para todo multi-indice α y β, donde $|\alpha| + |\beta| \leq k$.*

- *Para cada* $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *se sigue que* $\lambda_1 u +\ \lambda_2 v \in W^{k,p}(\Omega)$ *y*

  $\nabla^{\alpha}(\lambda_1 u + \lambda_2 v) = \lambda_1 \nabla^{\alpha} u + \lambda_2 \nabla^{\alpha} v,$ *donde* $|\alpha| \leq k.$

- *Si* O *es un subconjunto abierto de* Ω *entonces,* $u \in W^{k,p}(O)\,.$

- *Si* $\psi \in C_c^{\infty}(\Omega)\,,$ *entonces* $\psi u \in W^{k,p}(\Omega)$ *y*

  $\nabla^{\alpha}(\psi u) = \sum\limits_{\beta \leq \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \nabla^{\beta} \psi \nabla^{\alpha - \beta} u$ (*Fórmula de Leibniz*)$\,,$

  donde $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}.$

Teorema 2.5.1. *El espacio de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ *es un espacio de Banach para* $1 \leq p \leq \infty.$

Teorema 2.5.2. *El espacio de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ *es uniformemente convexo* (*reflexivo*) *para* $1 < p < \infty.$

Teorema 2.5.3. *El espacio de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ *es separable para* $1 \leq p < \infty.$

Teorema 2.5.4. *Sea* Ω *un abierto, bién regular de* $\mathbb{R}^N$, $m > 0$, $1 \leq p < \infty$. *Entonces para todo* $J \geq 0$, *se verifican:*

- *Si* $m < \frac{n}{p}$ *entonces* $W^{J+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{J,q}(\Omega)$, $p \leq q \leq \frac{np}{n-p} \equiv p^*.$

- *Si* $m = \frac{n}{p}$ *entonces* $W^{J+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{J,q}(\Omega)\,,\ p \leq q \leq +\infty.$

- *Si* $m > \frac{n}{p}$ *entonces* $W^{J+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^J_{\beta}(\Omega)$

  $C^J_{\beta}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ u \in C^J(\Omega) \ \text{tal que} \max\limits_{|\alpha| \leq J} \sup\limits_{x \in \Omega} |D^{\alpha} u(x)| < \infty \right\}.$

Teorema 2.5.5. (*Rellich-Kondrachov*) *Sea* Ω *un abierto, bién regular de* $\mathbb{R}^N$, $m > 0$, $1 \leq p < \infty$, *entonces:*

- $W^{1,p}(\Omega) \overset{C}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)\,,\ \ \forall q \in [1, p^*[\,,\ \ \frac{1}{P^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},\ \ p < N.$

- $W^{1,p}(\Omega) \overset{C}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)\,,\ \forall q \in [1, +\infty[\,,\ p = N.$

- $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C\left(\bar{\Omega}\right),\ \ p > N.$

2.6. Operadores Monótonos

La teoría de los operadores monótonos representa, además de los métodos variacionales, un método esencial analítico funcional para la investigación de soluciones de ecuaciones no lineales. Comenzamos con el caso más simple. Un operador monótono en $\mathbb{R}$ es cualquier función no decreciente $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, y un operador estrictamente monótono es una función creciente.

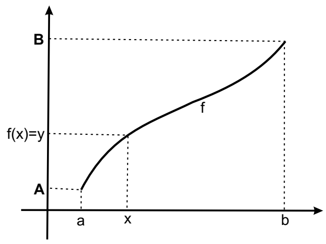
Teorema 2.6.1. *Sea f una función real, monótona continua en un intervalo (a, b) $[-\infty \leq a < b \leq +\infty]$. Entonces la ecuación*

$$f(x) = y$$

tiene una solución para todo $y \in (A, B)$, donde

$A = \lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x)$ *y* $B = \lim\limits_{x \longrightarrow b^-} f(x)$

Si la función f es estrictamente monótona entonces la solución es única.



Este es un resultado básico del Ánalisis Real, por lo que obviamos su demostración.

El teorema implica

Corolario 2.6.1.1. *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, una función monótona continua que satisface*

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty \tag{2.7}$$

Entonces la ecuación $f(x) = y$ tiene una solución para $y \in \mathbb{R}$.

Demostración: Es una consecuencia inmediata del teorema (2.6.1) tomando $A = \lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x)$ y $B = \lim\limits_{x \longrightarrow b^-} f(x)$. ■

Observación 5.

a) *Siempre que existan los límites A, B, se puede omitir la suposición de monotonía.*

b) *A fin de generalizar la condición de monotonía*

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

al caso multidimensional reescribiremos la desigualdad anterior en la forma

$$(f(x_1) - f(x_2))(x_1 - x_2) \geq 0. \tag{2.8}$$

La condición (2.7) puede ser reescrita en la forma

$$\lim_{|x| \longrightarrow \infty} \frac{f(x)\, x}{|x|} = \infty,$$

y es llamado la condición de coercividad, juega un rol importante en la prueba de teoremas de existencia.

Definición 2.6.1. *La aplicación $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es llamada:*

i) *monótona si*

$$(f(x_1) - f(x_2))(x_1 - x_2) \geq 0, \quad \forall\ x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}^N\ ; \tag{2.9}$$

ii) *estrictamente monótona si*

$$(f(x_1) - f(x_2))(x_1 - x_2) > 0, \quad \forall\ x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}^N, \qquad x_1 \neq\ x_2, \tag{2.10}$$

iii) *coerciva si*

$$\lim_{|x| \longrightarrow \infty} \frac{\langle f(x), x \rangle_{\mathbb{R}^N}}{|x|_{\mathbb{R}^N}} = +\infty \tag{2.11}$$

Teorema 2.6.2. *Sea $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ continua, monótona y coerciva entonces*

$$f\left(\mathbb{R}^N\right) = \mathbb{R}^N.$$

Es decir, dado $y \in \mathbb{R}^N$, existe $x \in \mathbb{R}^N :\ f(x) = y$.

Ahora veremos los resultados anteriores en un contexto general, es decir, en espacios de Banach (de dimensión finita o infiníta).

Definición 2.6.2. *Sea V un espacio de Banach, V^* su dual (algebraico y topológico) y sea*

$$A : V \longrightarrow V^*$$

un operador dado (eventualmente no lineal)

- *A es continua si y sólo sí* $u_n \longrightarrow u$ *implica* $Au_n \longrightarrow Au$.

- *A es débilmente continua si* $u_n \rightharpoonup u$ *implica* $Au_n \rightharpoonup Au$.

- *A es demicontinua si y sólo sí* $u_n \longrightarrow u$ *implica* $Au_n \rightharpoonup Au$.

- *A es hemicontinua si sólo sí la función real*

$$t \longrightarrow \langle A(u+tv), w\rangle$$

  es continua en $[0,1]$, $\forall u, v, w \in V$.

- *A es fuertemente continua si y sólo sí* $u_n \rightharpoonup u$ *implica* $Au_n \longrightarrow Au$.

- *A es acotado si lleva conjuntos acotados en conjuntos acotados, es decir*

$$|u|_V \leq K_1 \quad \Longrightarrow \quad |Au|_{V'} \leq K_2$$

  para algunos $K_1, K_2 > 0$.

- *A es coercivo si* $\lim\limits_{|u| \longrightarrow +\infty} \frac{\langle Au, u\rangle}{|u|_V} = +\infty$.

Definición 2.6.3 (Operadores Monótonos). *Sea* $A : V \longrightarrow V^*$, *entonces*

i) *A es monótono si* $\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0$, $\forall\ u, v \in V \quad u \neq v$.

ii) *A es estrictamente monótono si* $\langle Au - Av, u - v\rangle > 0$, $\forall\ u, v \in V \quad u \neq v$.

iii) *A es fuertemente monótono si hay una constante* $C > 0$ *tal que*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq C \|u - v\|^2, \quad \forall u, v \in V$$

iv) *A es uniformemente monótono si*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq a(\|u - v\|) \|u - v\|, \quad \forall u, v \in V$$

donde $a : [0, +\infty\rangle \longrightarrow [0, +\infty\rangle$ *es estrictamente creciente con* $a(0) = 0$ *y* $a(s) \longrightarrow +\infty$, *cuando* $s \longrightarrow +\infty$.

2.7. Operadores Pseudomonótonos

Existe una gran clase de ecuaciones diferenciales parciales cuasilineales, que no se incluyen en las condiciones del Teorema de Minty Browder. Por lo que, se introdujo una noción más débil de operador monótono, esto es el operador pseudomonótono, con el objetivo de probar la existencia de soluciones para el tipo de ecuaciones diferenciales parciales mencionadas.

Definición 2.7.1. *Sea $A : V \longrightarrow V^*$ operador en un espacio real Banach reflexivo V. El operador A satisface las condiciones (M), $(S)_+$, (S), $(S)_0$ y $(S)_1$ si y sólo sí , para $n \longrightarrow \infty$, se cumple lo siguiente:*

(i) Condición (M) :

$$u_n \rightharpoonup u, \qquad Au_n \rightharpoonup b, \qquad \liminf_{n\longrightarrow\infty} \langle Au_n, u\rangle \leq \langle b, u\rangle$$

$$\textit{implica} \qquad Au = b$$

(ii) Condición $(S)_+$:

$$u_n \rightharpoonup u, \qquad \limsup_{n\longrightarrow\infty} \langle Au_n - Au, u_n - u\rangle \leq 0 \qquad \textit{implica} \qquad u_n \longrightarrow u$$

(iii) Condición (S) :

$$u_n \rightharpoonup u, \qquad \lim_{n\longrightarrow\infty} \langle Au_n - Au, u_n - u\rangle = 0 \qquad \textit{implica} \qquad u_n \longrightarrow u$$

(iv) Condición $(S)_0$:

$$u_n \rightharpoonup u, \qquad Au_n \rightharpoonup b, \qquad \lim_{n\longrightarrow\infty} \langle Au_n, u\rangle = \langle b, u\rangle$$

$$\textit{implica} \qquad u_n \longrightarrow u$$

(v) Condición $(S)_1$:

$$u_n \rightharpoonup u, \qquad Au_n \longrightarrow b, \qquad \textit{implica} \qquad u_n \longrightarrow u$$

Se observa que:

$$(S)_+ \quad \Longrightarrow \quad (S) \quad \Longrightarrow \quad (S)_0 \quad \Longrightarrow \quad (S)_1 \tag{2.12}$$

Definición 2.7.2. *Sea $A : V \longrightarrow V^*$ operador en un espacio real Banach reflexivo V.*

(i) El operador A es llamado pseudomonótono si y sólo sí

$$u_n \rightharpoonup u \ \ y \ \ \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup \langle A(u_n), \ u_n - u\rangle \leq 0$$

implica

$$\langle A(u), u - v \rangle \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf \langle A(u_n), \ u_n - v\rangle \quad \forall v \in V$$

(ii) El operador A satisface la condición (P) si y sólo si

$$u_n \rightharpoonup u, \qquad \textit{implica} \qquad \limsup_{n\longrightarrow\infty} \langle Au_n, \ u_n - u\rangle \geq 0$$

Lema 2.7.1. *Sea V un espacio de Banach reflexivo, entonces para cada operador pseudomonótono $A : V \longrightarrow V^*$, entonces también A es operador demicontinuo.*

Demostración: Sea $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset V$ un sucesión tal que $u_\nu \longrightarrow u$. Como A es operador pseudomonótono, $\{A(u_\nu)\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ es también una sucesión acotada, y así cualquier subsucesión de $\{A(u_\nu)\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ también es acotada. Siendo V espacio de Banach reflexivo se cumple que V^* también es Banach reflexivo. Por (2.1.2) (T-Eberlein-Smulian) se obtiene una subsucesión convergente débilmente el cual denotaremos por facilidad $\{A(u_\nu)\}_\nu$, es decir $A(u_\nu) \rightharpoonup f$, para algún $f \in V^*$.
Como

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\langle A(u_\nu), u_\nu - v\rangle - \langle f, u_\nu - v\rangle| \\ &= |\langle A(u_\nu) - f, u_\nu - v\rangle| \\ &\leq \|A(u_\nu) - f\|_{V^*} \|u_\nu - v\|_V \end{aligned}$$

donde $\|A(u_\nu) - f\|_{V^*}$ es acotado y $\|u_\nu - v\| \longrightarrow 0$.

Entonces

$$\lim_{\nu\longrightarrow+\infty} \langle A(u_\nu), u_\nu - u\rangle = \langle f, u - u\rangle = 0$$

y por ser A pseudomonótono se tiene

$$\langle A(u), u - v\rangle \leq \liminf_{\nu\longrightarrow+\infty} \langle A(u_\nu), u_\nu - v\rangle = \langle f, u - v\rangle \tag{2.13}$$

para cualquier $v \in V$.

Se ha probado que cualquier subsucesión de $\{A(u_\nu)\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión que converge débilmente a $A(u) = f$, y así toda la sucesión $\{A(u_\nu)\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a $A(u)$. Por lo tanto, se prueba que A es un operador demicontinuo.

$\blacksquare$

2.7.1. Desigualdad de Tartar

Proposición 2.7.1. *Para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$*

$$\left\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y \right\rangle_{\mathbb{R}^N} \begin{cases} \geq & c_p |x-y|^p, & si \;\; p \geq 2 \;, \\ \geq & e_p |x-y|^2 (|x|+|y|)^{p-2}, & si \; 1 < p < 2, \end{cases} \tag{2.14}$$

donde c_p, e_p son constantes positivas y dependen de p.

Demostración: Sea $p \geq 2$, consideremos

$$I(p) = \left\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y \right\rangle$$

Luego,

$$\begin{aligned} I(p) &= \left\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y \right\rangle \\ &= \left\langle \int_0^1 \frac{d}{ds} |sx+(1-s)y|^{p-2}(sx+(1-s)y)\,ds,\; x-y \right\rangle \\ &= \int_0^1 (p-2)|sx+(1-s)y|^{p-4} |\langle sx+(1-s)y, x-y\rangle|^2 ds \\ &\quad + \int_0^1 |sx+(1-s)y|^{p-2}|x-y|^2 ds \end{aligned}$$

Por otro lado, siendp $p \geq 2$, se tiene

$$\int_0^1 (p-2)|sx+(1-s)y|^{p-4} |\langle sx+(1-s)y, x-y\rangle|^2 ds \geq 0$$

luego

$$I(p) \geq \int_0^1 |sx+(1-s)y|^{p-2}|x-y|^2 ds$$

Supongamos que $|x| \geq |y-x|$.

En la expresión

$$\begin{aligned}
|sx+(1-s)\,y| &= |x-(1-s)\,(x-y)| \\
&\geq ||x|-(1-s)\,|x-y|| \\
&\geq s\,|x-y|
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\left\langle |x|^{p-2}\,x-|y|^{p-2}\,y, x-y\right\rangle &\geq |x-y|^2 \int_0^1 |sx+(1-s)\,y|^{p-2}\,ds \\
&\geq |x-y|^2 \int_0^1 s^{p-2}\,|x-y|^{p-2}\,ds \\
&= |x-y|^p \int_0^1 s^{p-2} ds \\
&= \frac{1}{p-1}\,|x-y|^p
\end{aligned}$$

Tomando extremos se tiene

$$\left\langle |x|^{p-2}\,x-|y|^{p-2}\,y, x-y\right\rangle \geq c_1\,|x-y|^p$$

donde $c_1=\frac{1}{p-1}$ es constante positiva pues $p\geq 2$.

Ahora, si $|x|<|y-x|$ se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\left\langle |x|^{p-2}\,x-|y|^{p-2}\,y, x-y\right\rangle &\geq |x-y|^2 \int_0^1 |sx+(1-s)\,y|^{p-2}\,ds \\
&= |x-y|^2 \int_0^1 \frac{\left(|sx+(1-s)\,y|^2\right)^{\frac{p}{2}}}{|sx+(1-s)\,y|^2} ds
\end{aligned}$$

Ademas

$$\begin{aligned}
|sx+(1-s)\,y| &= |(1-s)\,(y-x)+x| \\
&\leq (1-s)\,|y-x|+|x| \\
&< (2-s)\,|y-x|
\end{aligned}$$

En la expresión anterior, se tiene

$$\begin{aligned}
|x-y|^2 \int_0^1 \frac{\left(|sx+(1-s)\,y|^2\right)^{\frac{p}{2}}}{|sx+(1-s)\,y|^2} ds &\geq |x-y|^2 \int_0^1 \frac{\left(|sx+(1-s)\,y|^2\right)^{\frac{p}{2}}}{(2-s)^2\,|y-x|^2} ds \\
&\geq \frac{1}{4}\int_0^1 \left(|sx+(1-s)\,y|^2\right)^{\frac{p}{2}}\,ds
\end{aligned}$$

Para aplicar la desigualdad de Holder, consideremos $q' = \frac{p}{2} \geq 1$ y $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |sx + (1-s)\,y|^2\,ds &\leq \left\{\int_0^1 1^q ds\right\}^{\frac{1}{q}} \left\{\int_0^1 \left(|sx + (1-s)\,y|^2\right)^{\frac{p}{2}} ds\right\}^{\frac{2}{p}} \\
&= \left\{\int_0^1 \left(|sx + (1-s)\,y|^2\right)^{\frac{p}{2}} ds\right\}^{\frac{2}{p}}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ elevando a la $p/2$ los extremos se tiene

$$\int_0^1 \left(|sx + (1-s)\,y|^2\right)^{\frac{p}{2}} ds \geq \left(\int_0^1 |sx + (1-s)\,y|^2\,ds\right)^{\frac{p}{2}}$$

Y así

$$\begin{aligned}
|x-y|^2 \int_0^1 \frac{\left(|sx + (1-s)\,y|^2\right)^{\frac{p}{2}}}{|sx + (1-s)\,y|^2} ds &\geq \frac{1}{4} \int_0^1 \left(|sx + (1-s)\,y|^2\right)^{\frac{p}{2}} ds \\
&\geq \frac{1}{4} \left(\int_0^1 |sx + (1-s)\,y|^2\,ds\right)^{\frac{p}{2}}
\end{aligned}$$

Ademas

$$|sx + (1-s)\,y|^2 = s^2\,|x|^2 + 2s\,\langle x, y\rangle - 2s^2\,\langle x, y\rangle + |y|^2 - 2s\,|y|^2 + s^2\,|y|^2$$

Reemplazando

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |sx + (1-s)\,y|^2\,ds &= \int_0^1 \left[s^2\,|x|^2 + 2s\,\langle x, y\rangle - 2s^2\,\langle x, y\rangle + |y|^2 - 2s\,|y|^2 + s^2\,|y|^2\right] ds \\
&= \frac{1}{3}\,|x|^2 + \frac{1}{3}\,\langle x, y\rangle + \frac{1}{3}\,|y|^2
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
|x-y|^2 \int_0^1 \frac{\left(|sx + (1-s)\,y|^2\right)^{\frac{p}{2}}}{|sx + (1-s)\,y|^2} ds &\geq \frac{1}{4} \left(\int_0^1 |sx + (1-s)\,y|^2\,ds\right)^{\frac{p}{2}} \\
&\geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}\,|x|^2 + \frac{1}{3}\,\langle x, y\rangle + \frac{1}{3}\,|y|^2\right)^{\frac{p}{2}} \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{3^{\frac{p}{2}}} \left(|x|^2 + \langle x, y\rangle + |y|^2\right)^{\frac{p}{2}}
\end{aligned}$$

También

$$-\langle x, y\rangle \leq |\langle x, y\rangle| \leq |x| \,.\, |y| \leq \frac{1}{2}\,|x|^2 + \frac{1}{2}\,|y|^2$$

Por eso

$$\begin{aligned}
|x|^2+|y|^2+\langle x,y\rangle &= \frac{1}{4}\left(|x|^2+|y|^2\right)+\frac{1}{4}\left(|x|^2+|y|^2\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(|x|^2+|y|^2\right)+\langle x,y\rangle\\
&\geq \frac{1}{4}\left(|x|^2+|y|^2\right)-\frac{1}{2}\langle x,y\rangle\\
&= \frac{1}{4}|x-y|^2
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
|x-y|^2\int_0^1\frac{\left(|sx+(1-s)\,y|^2\right)^{\frac{p}{2}}}{|sx+(1-s)\,y|^2}ds &\geq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{p}{2}}\left(|x|^2+\langle x,y\rangle+|y|^2\right)^{\frac{p}{2}}\\
&\geq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{p}{2}}\left(\frac{1}{4}|x-y|^2\right)^{\frac{p}{2}}\\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{p+2}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{p}{2}}|x-y|^p
\end{aligned}$$

Haciendo $c_2=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{p+2}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{p}{2}}\geq 0$ tenemos

$$I\,(p)\geq c_2\,|x-y|^p$$

Para $c_p=\text{mín}\,\{c_1,\ c_2\}$. Note que $c_p>0$ y

$$\left\langle |x|^{p-2}\,x-|y|^{p-2}\,y,x-y\right\rangle \geq c_p\,|x-y|^p$$

para todo $x,y\in\mathbb{R}^N$. ■

Proposición 2.7.2. *Sean $A,B:V\longrightarrow V^*$ operadores en el espacio real Banach V. Entonces:*

(a) *Si A es monótono y hemicontinuo, entonces A es pseudomonótono.*

(b) *Si A es fuertemente continuo, entonces A es pseudomonótono.*

(c) *Si A es demicontinuo con $(S)_+$, entonces A es pseudomonótono.*

(d) *Si A es continuo y $dimV<\infty$, entonces A es pseudomonótono.*

(e) *Aditividad. Si A y B son pseudomonótonos entonces $A+B$ es pseudomonótono.*

(*f*) *Si A es monótono y hemicontinuo y B es fuertemente continuo, entonces $A+B$ es pseudomonótono.*

(*g*) *Si A es monótono y B es fuertemente continuo, entonces $A+B$ satisface (P).*

DEMOSTRACIÓN.- Ver [17]

2.8. Propiedades de las aplicaciones del tipo (S_+)

Proposición 2.8.1. *Sea V un espacio de Banach reflexivo, $C \subset V$ no vacío y $A : C \to V^*$.*

(a) *Sea $A : C \to V^*$ un operador (S_+) y $\lambda > 0$, entonces $\lambda A : C \to V^*$ también es un operador (S_+).*

(b) *Sea $A : C \to V^*$ un operador (S_+) y $B : C \to V^*$ operador demicontinuo y (S_+) entonces $A + B : C \to V^*$ es un operador (S_+).*

(c) *Sea $A : C \to V^*$ un operador (S_+) y $B : C \to V^*$ operador monótono, entonces $A + B : C \to V^*$ es un operador (S_+).*

(d) *Sea $A : C \to V^*$ un operador (S_+) y $B : C \to V^*$ completamente continuo (i.e. si $u_\nu \rightharpoonup u$ en V entonces $B(u_\nu) \to B(u)$ en V^*) entonces $A + B : C \to V^*$ es un operador (S_+)*

DEMOSTRACIÓN.- Ver [2]

A seguir veremos algunos ejemplos de operadores pseudomonótonos que facilitarán nuestro trabajo.

Ejemplo 1 (De la implicación (a))**.** *Sea Ω abierto, acotado y bién regular de $\mathbb{R}^N$, $1 < p < +\infty$. Definamos el operador*

$$A : \underset{u}{W_0^{1,p}(\Omega)} \underset{\longmapsto}{\longrightarrow} \underset{Au}{W^{-1,p^*}(\Omega)}$$

$$Au : \underset{v}{W_0^{1,p}(\Omega)} \underset{\longmapsto}{\longrightarrow} \underset{\langle Au,v\rangle}{\mathbb{R}}$$

$$\langle Au, v\rangle = \left\langle -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), v\right\rangle$$

Este operador

$$Au = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \quad p \geq 2$$

es llamado el operador Pseudo Laplaciano.

Sea $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega): \; u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\langle Au, \varphi\rangle = \left\langle -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \varphi\right\rangle$$

Como $C_0^{\infty}(\Omega)$ *es denso* $W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\langle Au, \varphi\rangle = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}.\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx, \qquad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega), \; \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Por densidad y continuidad se tiene

$$\langle Au, w\rangle = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}.\frac{\partial w}{\partial x_i}dx, \qquad , \; \forall u, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Éste operador está bien definido, $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$|\langle Au, v\rangle| = \left|\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}.\frac{\partial v}{\partial x_i}dx\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-1}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| dx$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-1)p'} dx\right)^{1/p'} \left(\int_{\Omega} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p} dx\right)^{1/p} \qquad \textit{Por Holder continuo}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_p^{p-1}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|_p$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_p^{p}\right)^{p-1} \left(\sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|\right)^{1/p} \qquad \textit{Por Holder discreto}$$

$$= |\nabla u|_p^{p-1}\,|\nabla v|_p$$

$$= |u|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1}\,|v|_{W_0^{1,p}(\Omega)} < \infty$$

- *A es operador acotado*

  pues $\forall B \subseteq W^{1,p}(\Omega)$, *B acotado, entonces* $A(B)$ *es acotado.*

  Del resultado anterior se tiene

$$|\langle Au, v\rangle| \leq |u|_{W^{1,p}}^{p-1} |v|_{W^{1,p}}$$

  y

$$|Au|_{W^{-1,p'}} = \sup_{\substack{v \in W^{-1,p'} \\ v \neq 0}} \frac{|\langle Au, v\rangle|}{|v|} \leq |u|_{W^{1,p}}^{p-1}$$

  Existe un $M > 0$

$$|\langle Au, v\rangle|_{W^{-1.p'}} \leq M |u|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1}$$

y así A es acotado.

- *A es operador monótono*

Para $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\langle Au - Av, u - v\rangle = \langle Au, u - v\rangle - \langle Av, u - v\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) dx - \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) dx$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) dx$$

Por la desigualdad de Tartar (2.7.1)

$$\geq c_p \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^p dx = c_p |u - v|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p$$

$\Rightarrow$

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq c_p |u - v|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p \geq 0$$

Es decir, A es monótono.

- *A es hemicontinuo*

Probaremos que la aplicación $t \longmapsto \langle A(u+tv)\rangle$ *es continuo de [0,1] a* $\mathbb{R}$, $\forall u, v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

En efecto, dados $u, v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *y* $t \in \mathbb{R}$

$$\langle A(u+tv), w\rangle = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} + t\frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + t\frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \frac{\partial w}{\partial x_i} dx.$$

Observe que:

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} + t\frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + t\frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \frac{\partial w}{\partial x_i} \leq 2^{p-3} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} + t^{p-2} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + t\frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \frac{\partial w}{\partial x_i}$$

y

$$\left| \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} + t\frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + t\frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \frac{\partial w}{\partial x_i} \right| = \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} + t\frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} + t\frac{\partial v}{\partial x_i} \right| \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|$$

$$= \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} + t\frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-1} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|$$

Sea $t \longrightarrow t_0$ *en* $[0,1]$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} + t\frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + t\frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \frac{\partial w}{\partial x_i} \longrightarrow \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} + t_0\frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + t_0\frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \frac{\partial w}{\partial x_i} \quad c.s. \quad en\ \Omega$$

Las funciones del segundo miembro de la desigualdad anterior son integrables, luego por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue se tiene

$$\lim_{t \longrightarrow t_0} \langle A(u+tv), w\rangle = \langle A(u+t_0 v), w\rangle$$

Y así, el operador A es hemicontinuo.

Por la proposición (2.7.2 a.), el operador A es pseudomonótono. (Es decir, el operador pseudoLaplaciano es pseudomonótono). $\square$.

Ejemplo 2. *Consideremos el espacio de Sobolev* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *provisto de la norma* $\|u\| := \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$.

Definamos el operador p-Laplaciano negativo

$$-\triangle_p : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^* = W^{-1,p'}(\Omega),$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *abierto acotado con frontera bién regular con* $p > 2$, $p' > 0$ *tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Para $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\begin{array}{rclcl} A = -\triangle_p : & W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & W^{-1,p'}(\Omega) & \\ & u & \mapsto & Au = -\triangle_p u & = & -div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) \end{array}$$

donde

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx.$$

Afirmación 1. *El operador* $A : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ *está bién definido.*

En efecto, para $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *se tiene*

$$\begin{aligned} |\langle Au, v\rangle| &= \left|\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v dx\right| \\ &\leq \int_\Omega \left||\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v\right| dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-1}|\nabla v| dx \\ &\leq \left(\int_\Omega \left||\nabla u|^{p-1}\right|^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega |\nabla v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |\nabla u|_p^{p-1}|\nabla v|_p \\ &= \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1}\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} < \infty, \quad u, v \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{aligned}$$

Observación 6. *Si* $p > 1$, $q > 1$ *y* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *entonces las aplicaciones*

$$s \longmapsto |s|^{p-2}s$$

$$r \longmapsto |r|^{q-2}r$$

son inversas.

Aplicando la desigualdad de Tartar para $s_i = |r_i|^{q-2}r_i$ *se obtiene*

$$\left||r_2|^{q-2}r_2 - |r_1|^{q-2}r_1\right| \leq c_1|r_2 - r_1|^{q-1}, \quad 1 < q \leq 2 \tag{2.15}$$

$$\left||r_2|^{q-2}r_2 - |r_1|^{q-2}r_1\right| \leq c_2|r_2 - r_1|\left||r_2|^{q-1} - |r_1|^{q-1}\right|^{\frac{q-2}{q-1}}, si\ q > 2 \tag{2.16}$$

Afirmación 2. *El operador* $-\triangle_p$ *es continuo.*

Sean $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *entonces dado* $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *con* $\|\phi\| \leq 1$ *se tiene*

$$
\begin{aligned}
\left|\left(\triangle_p u_2 - \triangle_p u_1\right)\phi\right| &= \left|\int_\Omega \left(|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 - |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1\right).\nabla\phi \, dx\right| \\
&\leq \int_\Omega \left||\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 - |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1\right| |\nabla\phi| \, dx \\
&\leq \left(\int_\Omega \left| \ |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 - |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1\right|^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla\phi|^p \ dx\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

por la desigualdad de Holder para $\frac{p-1}{p} + \frac{1}{p} = 1$

$$
\leq \left(\int_\Omega \left|\underbrace{c\,|\nabla u_2 - \nabla u_1|^{p-1}}\right|^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \|\phi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}
$$

y por la expresión (2.16) se tiene

$$
\begin{aligned}
&= \left(\int_\Omega c^{\frac{p}{p-1}} |\nabla u_2 - \nabla u_1|^p \, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \left(c^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left[\left(\int_\Omega |\nabla u_2 - \nabla u_1|^p \, dx\right)^{1/p}\right]^{p-1} \\
&= c\,|\nabla u_2 - \nabla u_1|_p^{p-1} \\
&\leq c\,\|u_2 - u_1\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1} \quad u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega).
\end{aligned}
$$

Afirmación 3. *El operador* $A = -\triangle_p$ *es monótono.*

Sean $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > 2$

$$
\begin{aligned}
\langle Au - Av, u - v\rangle &= \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right)\nabla(u - v) \, dx \\
&= \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right)(\nabla u - \nabla v) \, dx \\
&= \int_\Omega \left\langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v, \nabla u - \nabla v\right\rangle_{\mathbb{R}^N} dx \\
&\geq \int_\Omega c_p\,|\nabla u - \nabla v|^p \, dx
\end{aligned}
$$

desigualdad de Tartar, $p > 2$

$$= c_p \left\| u - v \right\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \quad \geq 0$$

y así A es monótono.

Afirmación 4. *El operador $A = -\triangle_p$ es hemicontinuo.*

Para cada $u, v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ probaremos que la aplicación

$$t \longmapsto \langle A(u + tw), v \rangle$$

es continua de $[0,1]$ a $\mathbb{R}$. Además, para $u_n \longrightarrow u$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$ se tiene que

$$\langle Au_n, v \rangle \longrightarrow \langle Au, v \rangle$$

pues A es operador continuo.

En efecto, sean $u, v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $t \in \mathbb{R}$ y supongamos $t \longrightarrow t_0$

$$\langle A(u + tw), v \rangle = \int_\Omega |\nabla (u + tw)|^{p-2} \nabla (u + tw) \nabla v dx \tag{2.17}$$

$$|\nabla (u + tw)|^{p-2} \nabla (u + tw) \nabla v \leq 2^{p-3} \left(|\nabla u|^{p-2} + t^{p-2} |\nabla w|^{p-2} \right) \nabla (u + tw) \nabla v \tag{2.18}$$

y

$$\left| |\nabla (u + tw)|^{p-2} \nabla (u + tw) \nabla v \right| = |\nabla (u + tw)|^{p-1} |\nabla v| \tag{2.19}$$

Como $t \longrightarrow t_0$ en $[0,1]$ se tiene

$$|\nabla (u + tw)|^{p-2} \nabla (u + tw) \nabla v \longrightarrow |\nabla (u + t_0 w)|^{p-2} \nabla (u + t_0 w) \nabla v$$

casi siempre en Ω, luego

$$\int_\Omega \left| |\nabla (u + t_0 w)|^{p-2} \nabla (u + t_0 w) \nabla v \right| dx = \int_\Omega |\nabla (u + t_0 w)|^{p-1} |\nabla v| dx \tag{2.20}$$

$$\leq \left(\int_\Omega \left| |\nabla (u + t_0 w)|^{p-1} \right|^{\frac{p-1}{p}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \in L^1(\Omega) \tag{2.21}$$

por Holder.

De los resultados (2.21), (2.18) y por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue se obtiene

$$\lim_{t \longrightarrow t_0} \langle A(u + tw), v \rangle = \langle A(u + t_0 w), v \rangle \tag{2.22}$$

es decir

$$\langle -\triangle_p (u + tw), v\rangle \longrightarrow \langle -\triangle_p (u + t_0 w), v\rangle \tag{2.23}$$

así el operador $-\triangle_p$ es hemicontinuo.

Finalmente, en este ejemplo 2, por Proposición (2.7.2) , siendo $-\triangle_p$ monotóno y hemicontinuo se verifica que $-\triangle_p$ es un operador Pseudomonótono. $\square$.

Proposición 2.8.2. *El operador $-\triangle_p$ satisface la condición $(S)_+$.*

Demostración: Considere el operador

$$J : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx$$

(i) $J \in C^1\left(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R}\right)$

(ii) $\forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx$$

(iii) Considere

$$L \equiv J' : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega), \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Se va a verificar que L satisface la condición $(S)_+$ es decir si

$$u_\gamma \rightharpoonup u \text{ en } W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{y} \quad \lim_{\gamma \longrightarrow +\infty} \sup \langle Lu_\gamma - Lu, u_\gamma - u\rangle \leq 0$$

entonces

$$u_\gamma \longrightarrow u \text{ en } W_0^{1,p}(\Omega)$$

En efecto, siendo L estrictamente monótono, se tiene

$$0 < \langle Lu_\gamma - Lu, \, u_\gamma - u\rangle$$

$$0 \leq \lim_{\gamma \longrightarrow +\infty} \langle Lu_\gamma - Lu, \, u_\gamma - u\rangle$$

$$0 \leq \lim_{\gamma \longrightarrow +\infty} \inf \ \langle Lu_\gamma - Lu, \, u_\gamma - u\rangle$$

Y así, de la hipótesis y el resultado anterior

$$\lim_{\gamma \longrightarrow +\infty} \langle Lu_\gamma - Lu, u_\gamma - u\rangle = 0$$

Por demostrar que:

$$u_\gamma \longrightarrow u \text{ en } W_0^{1,p}(\Omega) \Longleftrightarrow \|u_\gamma - u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \longrightarrow 0, \text{ si } \gamma \longrightarrow +\infty$$

$$\Longleftrightarrow \int_\Omega |\nabla u_\gamma - \nabla u|^p \, dx \longrightarrow 0, \text{ si } \gamma \longrightarrow +\infty$$

- Para $p \geq 2$ y la desigualdad de Tartar

$$\begin{aligned} c_1 \int_\Omega |\nabla u_\gamma - \nabla u|^p \, dx &\leq \int_\Omega \left\langle |\nabla u_\gamma|^{p-2} \nabla u_\gamma - |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \ \nabla u_\gamma - \nabla u \right\rangle_{\mathbb{R}^N} dx \\ &= \int_\Omega \left(|\nabla u_\gamma|^{p-2} \nabla u_\gamma - |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right) . \left(\nabla u_\gamma - \nabla u \right) dx \\ &= \langle L u_\gamma - L u, u_\gamma - u \rangle \longrightarrow 0, \quad \gamma \longrightarrow +\infty \end{aligned}$$

- Si $1 < p < 2$ y la desigualdad de Tartar

$$c_2 \int_\Omega |\nabla u_\gamma - \nabla u|^p \, dx \leq c_2 \int_\Omega |\nabla u_\gamma - \nabla u|^p \frac{\left(|\nabla u_\gamma| + |\nabla u|\right)^{\frac{p(2-p)}{2}}}{\left(|\nabla u_\gamma| + |\nabla u|\right)^{\frac{p(2-p)}{2}}} dx$$

$$= c_2 \int_\Omega \frac{|\nabla u_\gamma - \nabla u|^p}{\left(|\nabla u_\gamma| + |\nabla u|\right)^{\frac{p(2-p)}{2}}} . \left(|\nabla u_\gamma| + |\nabla u|\right)^{\frac{p(2-p)}{2}} dx$$

por desigualdad de Holder, $\frac{1}{2/p} + \frac{1}{2/(2-p)} = 1$

$$\leq \left(\int_\Omega \left| \frac{|\nabla u_\gamma - \nabla u|^p}{\left(|\nabla u_\gamma| + |\nabla u|\right)^{\frac{p(2-p)}{2}}} \right|^{\frac{2}{p}} dx \right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_\Omega \left| \left(\ |\nabla u_\gamma| + |\nabla u| \right)^{\frac{p(2-p)}{2}} \ \right|^{\frac{2}{2-p}} dx \right)^{\frac{2-p}{2}}$$

$$= \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u_\gamma - \nabla u|^2}{\left(|\nabla u_\gamma| + |\nabla u|\right)^{2-p}} dx \right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_\Omega | \ |\nabla u_\gamma| + |\nabla u| \ |^p \, dx \right)^{\frac{2-p}{2}}$$

De la desigualdad de Tartar

$$\leq \left(\int_\Omega \left\langle |\nabla u_\gamma|^{p-2} \nabla u_\gamma - |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \ \nabla u_\gamma - \nabla u \right\rangle_{\mathbb{R}^N} dx \right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_\Omega | \ |\nabla u_\gamma| + |\nabla u| \ |^p \, dx \right)^{\frac{2-p}{2}}$$

$$= \left(\int_\Omega \left(|\nabla u_\gamma|^{p-2} \nabla u_\gamma - |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right) \left(\nabla u_\gamma - \nabla u \right) dx \right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_\Omega | \ |\nabla u_\gamma| + |\nabla u| \ |^p \, dx \right)^{\frac{2-p}{2}}$$

De la hipótesis

$$u_\gamma \rightharpoonup u \text{ en } W_0^{1,p}(\Omega) \Longrightarrow \exists K > 0 : |\nabla u_\gamma|_p \leq K$$

$$\Longrightarrow \int_\Omega |\nabla u_\gamma|^p \, dx \leq \widetilde{K}$$

Además, $|x+y|^p \leq 2^{p-1}\left(|x|^p + |y|^p\right), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\leq \left(\int_\Omega \left(|\nabla u_\gamma|^{p-2} \nabla u_\gamma - |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right) \left(\nabla u_\gamma - \nabla u \right) dx \right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_\Omega 2^{p-1} \left(|\nabla u_\gamma|^p + |\nabla u|^p \right) dx \right)^{\frac{2-p}{2}}$$

$$= \left(\langle Lu_\gamma - Lu, u_\gamma - u \rangle \right)^{\frac{p}{2}} \left(2^{\frac{(p-1)(2-p)}{2}} \left[\int_\Omega |\nabla u_\gamma|^p \, dx + \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right]^{\frac{2-p}{2}} \right)$$

$$\leq \left(\langle Lu_\gamma - Lu, u_\gamma - u \rangle \right)^{\frac{p}{2}} \left(\widetilde{K} + \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \right)^{\frac{2-p}{2}} \longrightarrow 0, \text{si } \gamma \longrightarrow +\infty$$

Y así

$$\int_\Omega |\nabla u_\gamma - \nabla u|^p \, dx \longrightarrow 0, \text{ si } \gamma \longrightarrow +\infty$$

$$\Longrightarrow \|\nabla u_\gamma - \nabla u\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow u_\gamma \longrightarrow u \ \text{ en } \ W_0^{1,p}(\Omega).$$

Finalmente, eso verifica que $L \equiv -\Delta_p$ satisface la condición $(S)_+$. ■

Definición 2.8.1 (Operador de Nemytskij). *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, *un conjunto medible no vacio, y sea* $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $m \geq 1$, *y* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *una función dada. Entonces el operador de Nemytskij* F *asigna* $u \longmapsto f$ *o* u; *i.e.,* F *esta dado por*

$$Fu(x) = (fog)(x) = f(x, u(x)) \quad \textit{para } x \in \Omega$$

2.9. Función Carathéodory

Definición 2.9.1. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, *un conjunto medible no vacio, y sea* $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $m \geq 1$. *La función* f *es llamada función Carathéodory si las siguientes dos condiciones se cumplen:*

(i) *Si para cada* $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ *la función*

$$x \longmapsto f(x, s, \xi) \text{ es medible Lebesgue en } \Omega.$$

(ii) *Si para casi todo* $x \in \Omega$

$$(s, \xi) \longmapsto f(x, s, \xi) \text{ es continua en } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m.$$

Capítulo 3

Resultado Principal

Un resultado importante para lograr nuestro objetivo, que es probar la existencia de soluciones débiles del problema (1.2) es el Teorema de Brézis, para operadores pseudomonótonos.

Teorema 3.0.1 (**De Brézis**). *Sea V un espacio de Banach, separable y reflexivo. Para cualquier $A : V \longrightarrow V^*$, un operador pseudomonótono y coercivo entonces es surjectivo. Es decir, para cualquier $f \in V^*$, existe al menos una solución de la ecuación*

$$A(u) = f \tag{3.1}$$

Demostración:

- Vamos ahora a aplicar el "método de Galerkin"para demostrar la existencia de solución débil de (3.1).

Como V es separable, entonces existe una base hilbertiana $(w_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de V, tal que $V_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$ el espacio generado por $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ tal que $V = \overline{\bigcup_m V_m}$. Determinaremos una función (si fuera posible) una función $u_m \in V_m$ que tiene la forma

$$u_m = \sum_{i=1}^{m} \xi_i^m w_m$$

que satisface las ecuaciones de Galerkin

$$u_m \in V_m : \langle A(u_m) - f, w_i\rangle = 0, \ \ i = 1, 2, ..., m. \tag{3.2}$$

Primero veamos la existencia de soluciones del sistema aproximado

$$g(c^m) = 0 \ \text{ en } \mathbb{R}^m,$$

donde $c^m := (c_1^m, c_2^m, ..., c_m^m) \in \mathbb{R}^m$ y $g := (g_1, g_2, ..., g_m) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por

$$\begin{array}{rcl} g_i : \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ c^m & \longmapsto & g_i(c^m) \end{array}$$

y $\quad g_i(c^m) := \langle A(u_m) - f, w_i \rangle\,,\ \ i = 1, 2, ...m.$

Afirmación 1. Las funciones coordenadas g_i son continuas.
En efecto, sea la sucesión convergente $x^l \longrightarrow x$ en $\mathbb{R}^m$ donde $y_l = \sum_{i=1}^{m} x_i^l w_i$ y $y = \sum_{i=1}^{m} x_i w_i$, entonces $y_l \longrightarrow y$ en V. Desde A es acotado se tiene que la sucesión $(A(u_l))_{l\in\mathbb{N}}$ es acotado en V^*. Como V^* es también reflexivo, se tiene que $A(y_l) \rightharpoonup \psi$ por (2.1.2) (T-Eberlein-Smulian). Por lo tanto, $\langle A(y_l), y_l - y\rangle \longrightarrow 0$, y teniendo en cuenta que el operador A es pseudomonótono, resulta

$$\begin{aligned} \langle A(y), y - v\rangle &\leq \liminf_{l\longrightarrow+\infty} \langle A(y_l), y_l - v\rangle \\ &= \lim_{l\longrightarrow+\infty} \langle A(y_l), y_l - v\rangle \\ &= \langle \psi, y - v\rangle\,, \end{aligned}$$

entonces $\langle A(y), y - v\rangle - \langle \psi, y - v\rangle \leq 0$ y así $\langle A(y) - \psi, y - v\rangle \leq 0$ $\forall v \in V$.
Sea $v = y - w$, donde $w \in V$ se tiene $\langle A(y) - \psi, w\rangle \leq 0$, $\forall w \in V$
$\Leftrightarrow \langle A(y) - \psi, w\rangle = 0$, $\forall w \in V \Leftrightarrow A(y) = \psi$.

Por lo tanto,

$$g_i\left(x^l\right) = \langle A\left(y_l\right) - f,\ \xi_i\rangle \longrightarrow \langle A\left(y\right) - f,\ \xi_i\rangle = g_i\left(x\right)$$

y así se ve que cada función coordenada g_i es continua, por lo tanto la aplicación $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua.

Afirmación 2. El sistema aproximado (3.2) (ecuaciones de Galerkin) tiene una solución aproximada $u_m \in V_m$ tal que $\|u_m\| \leq R_1$, donde $R_1 > 0$ es una constante independiente de $m \in \mathbb{N}$.
En efecto, este resultado se obtiene usando la continuidad de g y la coercividad de A.
Es decir, $\{u_m\}_m \subset V$ sucesión de solución aproximada de Galerkin tal que $u_m \in V$

y $\|u_m\| \leq R_1$ de aquí $\|A(u_m)\|_{V^*} \leq M$, para algún $M > 0$, pues A es acotado. Así tenemos

$$\langle A(u_m) - f, v\rangle = 0, \ \forall v \in V_m \tag{3.3}$$

- Como la sucesión $\{u_m\}_m$ es acotada en V, por (2.1.2) (T-Eberlein-Smulian), existe una subsucesión $\left(u_{n_j}\right)_j \in V$ tal que $u_{n_j} \rightharpoonup u$ en V.

Eso quiere decir que

$$\left\langle A\left(u_{m_j}\right), u_{m_j}\right\rangle = \left\langle f, u_{m_j}\right\rangle \longrightarrow \langle f, u\rangle$$

Sea un $v \in V$. Por la densidad de $\bigcup\limits_m V_m$ en V, existe $w^\varepsilon \in \bigcup\limits_m V_m$ tal que $\|v - w^\varepsilon\| < \varepsilon$, luego

$$w^\varepsilon \in \cup_m V_m \Longleftrightarrow \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tal que } w^\varepsilon \in V_{m_\varepsilon}$$

Para j suficientemente grande podemos tener $m_j > m_\varepsilon$ el cual implica que $w^\varepsilon \in V_{m_\varepsilon} \subset V_{m_j}$ y así por (3.3) se cumple que

$$\left\langle A\left(u_{m_j}\right) - f, w^\varepsilon\right\rangle = 0.$$

Luego entonces

$$\begin{aligned}
\left\langle A\left(u_{m_j}\right) - f, v\right\rangle &= \left\langle A\left(u_{m_j}\right) - f, v - w^\varepsilon\right\rangle \\
&\leq \left\|A\left(u_{m_j}\right) - f\right\|_{V^*} \|v - w^\varepsilon\|_V \\
&\leq \left(\left\|A\left(u_{m_j}\right)\right\|_{V^*} + \|f\|_{V^*}\right) \|v - w^\varepsilon\|_V \\
&\leq \left(M + \|f\|_{V^*}\right)\varepsilon
\end{aligned}$$

Para $v = u_{m_j} - u$ se tiene

$$\begin{aligned}
\left\langle A\left(u_{m_j}\right), u_{m_j} - u\right\rangle &= \left\langle A\left(u_{m_j}\right) + f - f, u_{m_j} - u\right\rangle \\
&= \left\langle A\left(u_{m_j}\right) - f, u_{m_j} - u\right\rangle + \left\langle f, u_{m_j} - u\right\rangle.
\end{aligned}$$

Tomando limite superior

$$\limsup_{j \longrightarrow +\infty} \left\langle A\left(u_{m_j}\right), \ u_{m_j} - u\right\rangle \leq \left(M + \|f\|_{V^*}\right)\varepsilon$$

y así para ε arbitrario se tiene $\limsup\limits_{j \longrightarrow +\infty} \left\langle A\left(u_{m_j}\right), \ u_{m_j} - u\right\rangle \leq 0$, ademas siendo el operador A pseudomonótono tenemos

$$\langle A(u), u - v\rangle \leq \lim_{j \longrightarrow +\infty} \inf \left\langle A\left(u_{m_j}\right), \ u_{m_j} - v\right\rangle.$$

Si tomamos $v \in \bigcup\limits_m V_m$, para j suficentemente grande se tiene que $v \in V_{m_j}$, y así

$$\langle A(u), u - v\rangle \leq \lim_{j \longrightarrow +\infty} \inf \left\langle A\left(u_{m_j}\right), u_{m_j} - v\right\rangle = \langle f, u - v\rangle \quad \forall v \in \bigcup_m V_m$$

Lo que se quiere es verificar que el resultado anterior se cumpla $\forall v \in V$. Sea $v \in V$ y $\varepsilon > 0$, entonces $\exists w^{\varepsilon} \in \bigcup_m V_m$ tal que $\|v - w^{\varepsilon}\| < \varepsilon$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle A(u) - f, u - v\rangle &= \langle A(u) - f, u - w^{\varepsilon}\rangle + \langle A(u) - f, w^{\varepsilon} - v\rangle \\ &\leq \left(\|A(u)\|_{V^*} + \|f\|_{V^*}\right)\varepsilon.\end{aligned}$$

Para ε arbitrario, se sigue que $\langle A(u) - f,\ u - v\rangle \leq 0\ \ \forall v \in V$. Quiere decir que si tomamos $\forall w \in V$, y haciendo $v = u - w$ se tendrá $\langle A(u) - f,\ w\rangle \leq 0$, $\forall w \in V$, con lo cual concluimos que

$$A(u) = f$$

■

3.1. Formulación variacional del problema

Sea $r \in [1, +\infty[$, y r' su conjugada de Sobolev tal que $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$, ademas p^* es el exponente crítico de Sobolev donde $p^* = \frac{pN}{N-p}$ si $N > p$.
Consideremos el espacio de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ provisto de la norma $\|u\| := |u|_{L^p(\Omega)}$ $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. El operador

$$-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^* = W^{-1,p'}(\Omega)$$

En el análisis de la solución débil del nuestro problema (1.2), sea $\lambda_{1,p}$ el primer autovalor del operador $-\Delta_p$ en el espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ el cual se define

$$\lambda_{1,p} = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq 0} \frac{|\nabla u|^p_{L^p(\Omega)}}{|u|^p_{L^p(\Omega)}}. \tag{3.4}$$

En la parte derecha de la ecuación (1.2), $f(x, u, \xi)$ satisface las siguientes hipótesis:

(H1) Existen constantes $a_1 \geq 0,\ a_2 \geq 0,\ \alpha \in [0, p^* - 1[,\ \beta \in \left[0, \frac{p}{(p^*)'}\right[$ y una función $\sigma \in L^{\gamma'}(\Omega)$ donde $\gamma \in [1, p^*[$, tal que

$$|f(x, s, \xi)| \leq \sigma(x) + a_1 |s|^{\alpha} + a_2 |\xi|^{\beta} \text{ casi siempre en } \Omega,\ \forall (s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N;$$

(H2) tambien existen constantes $d_1 \geq 0$, $d_2 \geq 0$, donde $\lambda_{1,p}^{-1} d_1 + d_2 < 1$, y una función $\omega \in L^1(\Omega)$, tal que

$$f(x,s,\xi)\, s \leq \omega(x) + d_1 |s|^p + d_2 |\xi|^p \text{ casi siempre en } \Omega, \ \forall (s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N.$$

Considerar el problema de hallar una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\left| \begin{array}{cc} -\Delta_p u - \mu \Delta_q u = f(x,u,\nabla u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{3.5}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un subconjunto no vacío, abierto y acotado con frontera $\partial\Omega$, con $\mu \in [0,\infty[$, $1 < q < p$, donde el operador p;Laplaciano se define como $\Delta_p u = div\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right)$ y similarmente el operador q;Laplaciano es $\Delta_q u = div\left(|\nabla u|^{q-2} \nabla u\right)$.

Multiplicamos la ecuación (3.5) por una función v suficientemente regular e integrando sobre Ω.

$$\int_\Omega (-\Delta_p u)\, v dx + \int_\Omega (-\mu \Delta_q u)\, v dx = \int_\Omega f(x,u,\nabla u)\, v dx \tag{3.6}$$

Aplicando el Teorema de Green e imponiendo la condición $v\mid_\Gamma = 0$ se tiene

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx + \mu \int_\Omega |\nabla u|^{q-2} \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(x,u,\nabla u)\, v dx \tag{3.7}$$

Con esto definimos el concepto de solución débil del problema (3.5).

Definición 3.1.1. *Decimos que $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es solución débil de (3.5) si*

(i) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

(ii) *u satisface la ecuación (3.7), $\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Observación 7. *Cada término en (3.7) está bién definido.*

(a) $\left| \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx \right| \leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} |\nabla u| |\nabla v| dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-1} |\nabla v| dx$

por desigualdad de Holder, $\frac{1}{(p-1)/p} + \frac{1}{p} = 1$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\int_\Omega \left| |\nabla u|^{p-1} \right|^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq |\nabla u|_p^{p-1} |\nabla v|_p \\ &\leq \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} < \infty \end{aligned}$$

(b) $\left|\mu\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^{q-2}\nabla u\nabla v dx\right|\leq\mu\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^{q-1}\nabla v dx,\quad \mu\geq 0$

por desigualdad de Holder, $\frac{1}{q/(q-1)}+\frac{1}{q}=1$

$$\begin{aligned}
&\leq \mu\left(\int\limits_{\Omega}\left||\nabla u|^{q-1}\right|^{\frac{q}{q-1}}dx\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int\limits_{\Omega}|\nabla v|^{q}dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= \mu|\nabla u|_{q}^{q-1}|\nabla v|_{q}\\
&\leq \mu\|u\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}^{q-1}\|v\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}
\end{aligned}$$

para $1<q<p$*, se tiene* $W_0^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow W_0^{1,q}(\Omega)\,,\;\;\|u\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}\leq\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$

$$\leq\mu\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1}\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\quad<\infty$$

(c) Por desigualdad de Holder, la hipótesis $(H1)$ *y* $1<\gamma<p^*$

$$\begin{aligned}
\left|\int\limits_{\Omega}f(x,u,\nabla u)v dx\right| &\leq \left(\int\limits_{\Omega}|f(x,u,\nabla u)|^{\gamma'}dx\right)^{1/\gamma'}\left(\int\limits_{\Omega}|v|^{\gamma}dx\right)^{1/\gamma}\\
&\leq \left(C_\gamma\int\limits_{\Omega}\left(|\sigma(x)|^{\gamma'}+|u(x)|^{\alpha\gamma'}+|\nabla(x)|^{\beta\gamma'}\right)dx\right)^{1/\gamma'}\left(\int\limits_{\Omega}|v|^{\gamma}dx\right)^{1/\gamma}
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\gamma'<p^*\;\;\rightarrow\;\;\gamma'<\frac{p^*}{\alpha}\\ \beta\gamma'<p^*\;\;\rightarrow\;\;\gamma'<\frac{p^*}{\beta}\end{array}\right\}\Rightarrow\gamma'<\min\left\{\frac{p^*}{\alpha},\frac{p^*}{\beta}\right\}$$

$1<\gamma<p^*\rightarrow\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma'}=1\Rightarrow\gamma'=\frac{\gamma-1}{\gamma}$

$\frac{1}{p^*}<\frac{1}{\gamma}<1\rightarrow\quad -1<-\frac{1}{\gamma}<-\frac{1}{p^*}\rightarrow\quad 0<\underbrace{1-\frac{1}{\gamma}}<1-\frac{1}{p^*}$

$\rightarrow\frac{1}{\gamma'}<1-\frac{1}{p^*}\qquad\rightarrow\gamma'>\frac{p^*}{p^*-1}$

Basta elegir

$$\frac{p^*}{p^*-1}<\gamma'<\min\left\{\frac{p^*}{\alpha},\frac{p^*}{\beta}\right\}\tag{3.8}$$

$$\leq(C_\gamma)^{1/\gamma'}\left(\underbrace{\int\limits_{\Omega}|\sigma(x)|^{\gamma'}dx}_{(i)}+\underbrace{\int\limits_{\Omega}|u(x)|^{\alpha\gamma'}dx}_{(ii)}+\underbrace{\int\limits_{\Omega}|\nabla(x)|^{\beta\gamma'}dx}_{(iii)}\right)^{1/\gamma'}\underbrace{\left(\int\limits_{\Omega}|v|^{\gamma}dx\right)^{1/\gamma}}_{<\infty}$$

Por (3.8) se tiene que cada término es finito.

Observación 8. *Además, se prueba que*

$$f\left(x,u,\nabla u\right)\in L^{r'}\left(\Omega\right),\qquad \forall u\in W_0^{1,p}\left(\Omega\right), \tag{3.9}$$

para algún $r\in\left[1,p^*\right[$, *de acuerdo a la condición* $(H1)$ *y propiedad de inmersión de Sobolev.*

Teorema Principal

Ahora ya estamos listos para enunciar y probar el resultado central de nuestro trabajo.

3.2. Existencia de la solución

Teorema 3.2.1. *Suponiendo que las condiciones* $(H1)$ *y* $(H2)$ *se cumplen, entonces el problema (3.5) tiene una solución débil* $u\in W_0^{1,p}\left(\Omega\right)$, *donde el parámetro* $\mu\geq 0$.

Demostración: *En la existencia de la solución del problema (3.5) se utiliza la teoría de operadores Pseudomonótonos.*
Para ello construimos el operador $A:W_0^{1,p}\left(\Omega\right)\longrightarrow W^{-1,p'}\left(\Omega\right)$ *definido por*

$$Au=-\Delta_p u-\mu\Delta_q u-N\left(u\right) \tag{3.10}$$

$$Au:\underset{v}{W_0^{1,p}\left(\Omega\right)}\ \underset{\mapsto}{\rightarrow}\ \underset{\langle Au,v\rangle}{\mathbb{R}}$$

$$\begin{aligned}\langle Au,v\rangle &= \langle -\Delta_p u-\mu\Delta_q u-N\left(u\right),v\rangle\\ &= \int_\Omega \left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u.\nabla v dx+\mu\int_\Omega \left|\nabla u\right|^{q-2}\nabla u.\nabla v dx-\int_\Omega f\left(x,u,\nabla u\right)v dx\end{aligned}$$

donde $N:W_0^{1,p}\left(\Omega\right)\longrightarrow W^{-1,p'}\left(\Omega\right)$ *es el operador de Nemytskii asociado a* f.

$$N:\underset{u}{W_0^{1,p}\left(\Omega\right)}\ \underset{\longmapsto}{\rightarrow}\ \underset{N(u)=f(x,u,\nabla u)}{W^{-1,p'}\left(\Omega\right)}$$

Del resultado en la ecuación (3.9) se tiene que

$$N\left(u\right)\in W^{-1,p'}\left(\Omega\right)\quad \forall u\in W_0^{1,p}\left(\Omega\right)$$

De la hipótesis $(H1)$, *denominada así como la condición de crecimiento para* f *tenemos que*

$$A:W_0^{1,p}\left(\Omega\right)\longrightarrow W^{-1,p'}\left(\Omega\right)$$

es un operador acotado, el cual significa que lleva conjuntos acotados en conjuntos acotados.

Afirmación 5. *El operador A definido en (3.10) es pseudomonótono.*
En efecto, sea $\{u_\nu\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$u_\nu \rightharpoonup u \quad y \quad \limsup_{\nu \longrightarrow +\infty} \langle Au_\nu, u_\nu - u \rangle \leq 0$$

Veamos el caso cuando $N > p$. De la hipótesis (H1) conseguimos que: $\gamma < p^*$, $\frac{p^*}{p^*-\alpha} < p^*$, $\frac{p}{p-\beta} < p^*$, donde p^* es el exponente crítico de Sobolev, $p^* = \frac{pN}{N-p}$ si $N > p$, y $p^* = \infty$ si $N \leq p$. En efecto:

- *para $\gamma \in [1, p^*[$ entonces $1 \leq \gamma < p^*$, además por Teorema de Rellich-Kondrachov de la inmersión compacta se tiene*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^\gamma(\Omega) \quad \Rightarrow$$

$$u_\nu \longrightarrow u \ en \ L^\gamma(\Omega) \tag{3.11}$$

- *para $\alpha \in [0, p^*-1[\iff 0 \leq \alpha < p^*-1 \rightarrow \ 1 < p^*-\alpha \rightarrow \ \frac{1}{p^*-\alpha} < 1 \ \rightarrow \frac{p^*}{p^*-\alpha} < p^*$*

$$\Rightarrow \quad W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^{\frac{p^*}{p^*-\alpha}}(\Omega) \quad \Rightarrow$$

$$u_\nu \longrightarrow u \ en \ L^{\frac{p^*}{p^*-\alpha}}(\Omega). \tag{3.12}$$

- *para $\beta \in \left[0, \frac{p}{(p^*)'}\right[\Leftrightarrow$*

$$0 \leq \beta < \frac{p(p^*-1)}{p^*} \rightarrow \quad \frac{\beta}{p^*-1} < \frac{p}{p^*} \rightarrow \quad \beta < \frac{p(p^*-1)}{p^*} \rightarrow \ p-\beta > p - \frac{p(p^*-1)}{p^*} \rightarrow$$
$$p - \beta > p\left[1 - \frac{p^*-1}{p^*}\right] \rightarrow \ \frac{p-\beta}{p} > \frac{p^*-p^*+1}{p^*} \rightarrow \quad \frac{p}{p-\beta} < p^*$$
$$\Rightarrow \quad W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^{\frac{p}{p-\beta}}(\Omega) \quad \Rightarrow \quad u_\nu \longrightarrow u \ en \ L^{\frac{p}{p-\beta}}(\Omega). \tag{3.13}$$

*Con estos resultados de convergencia fuerte y la hipótesis **(H1)**, se tiene*

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu \longrightarrow +\infty} \int_\Omega f(x, u_\nu, \nabla u_\nu)(u_\nu - u)\, dx &\leq \lim_{\nu \longrightarrow +\infty} \left| \int_\Omega f(x, u_\nu, \nabla u_\nu)(u_\nu - u)\, dx \right| \\
&\leq \lim_{\nu \longrightarrow +\infty} \int_\Omega |f(x, u_\nu, \nabla u_\nu)| . |u_\nu - u|\, dx \\
&\leq \lim_{\nu \longrightarrow +\infty} \int_\Omega \left(\sigma(x) + a_1 |u_\nu|^\alpha + a_2 |\nabla u_\nu|^\beta\right) |u_\nu - u|\, dx
\end{aligned}$$

$$\leq \lim_{\nu\longrightarrow+\infty}\int_\Omega \sigma(x)\,|u_\nu-u|\,dx+\lim_{\nu\longrightarrow+\infty}\int_\Omega a_1\,|u_\nu|^\alpha\,|u_\nu-u|\,dx+\lim_{\nu\longrightarrow+\infty}\int_\Omega a_2\,|\nabla u_\nu|^\beta\,|u_\nu-u|\,dx$$

$$=\underbrace{\lim_{\nu\longrightarrow+\infty}\int_\Omega \sigma(x)\,|(u_\nu-u)|\,dx}_{I_1}+\underbrace{\lim_{\nu\longrightarrow+\infty}\int_\Omega a_1\,|u_\nu|^\alpha\,|u_\nu-u|\,dx}_{I_2}+\underbrace{\lim_{\nu\longrightarrow+\infty}\int_\Omega a_2\,|\nabla u_\nu|^\beta\,|u_\nu-u|\,dx}_{I_3}$$

Analizando cada término

***)** *Para I_1, donde $\sigma\in L^{\gamma'}(\Omega)$, $\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma'}=1$, la convergencia (3.11) y desigualdad de Sobolev.*

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \lim_{\nu\longrightarrow+\infty}\int_\Omega |\sigma(x)|\,|(u_\nu-u)|\,dx\leq \lim_{\nu\longrightarrow+\infty}\left(\int_\Omega |\sigma(x)|^{\gamma'}\,dx\right)^{\frac{1}{\gamma'}}\left(\int_\Omega |u_\nu-u|^{\gamma}\,dx\right)^{\frac{1}{\gamma}}\\
&= \lim_{\nu\longrightarrow+\infty}|\sigma|_{L^{\gamma'}(\Omega)}\,|u_\nu-u|_{L^{\gamma}(\Omega)}=0
\end{aligned}$$

****)** *Para I_2, $\alpha\in[0,p^*-1[$, $\frac{1}{\left(\frac{p^*}{p^*-\alpha}\right)}+\frac{1}{\left(\frac{p^*}{\alpha}\right)}=1$, la convergencia (3.12) y desigualdad de Sobolev.*

$$\begin{aligned}
I_2 &= \lim_{\nu\longrightarrow+\infty}\int_\Omega a_1\,|u_\nu|^\alpha\,|u_\nu-u|\,dx\\
&\leq \lim_{\nu\longrightarrow+\infty}a_1\left(\int_\Omega \left||u_\nu|^\alpha\right|^{\frac{p^*}{\alpha}}\,dx\right)^{\frac{1}{(p^*/\alpha)}}\left(\int_\Omega |u_\nu-u|^{\frac{p^*}{p^*-\alpha}}\,dx\right)^{\frac{1}{\left(\frac{p^*}{p^*-\alpha}\right)}}\\
&= \lim_{\nu\longrightarrow+\infty}a_1\left(\int_\Omega |u_\nu|^{p^*}\,dx\right)^{\frac{\alpha}{p^*}}\left(\int_\Omega |u_\nu-u|^{\frac{p^*}{p^*-\alpha}}\,dx\right)^{\frac{1}{\left(\frac{p^*}{p^*-\alpha}\right)}}\\
&= \lim_{\nu\longrightarrow+\infty}a_1\,|u_\nu|_{L^{p^*}(\Omega)}\,|u_\nu-u|_{L^{\frac{p^*}{p^*-\alpha}}(\Omega)}=0
\end{aligned}$$

*****)** *Para I_3, $\beta\in\left[0,\frac{p}{(p^*)'}\right[$, $\frac{1}{\left(\frac{p}{p-\beta}\right)}+\frac{1}{\left(\frac{p}{\beta}\right)}=1$, la convergencia (3.13) y desigualdad de Sobolev.*

$$\begin{aligned}
I_3 &= \lim_{\nu\longrightarrow+\infty}\int_\Omega a_2\,|\nabla u_\nu|^\beta\,|u_\nu-u|\,dx\\
&\leq \lim_{\nu\longrightarrow+\infty}a_2\left(\int_\Omega \left||\nabla u_\nu|^\beta\right|^{\frac{p}{\beta}}\,dx\right)^{\frac{1}{\left(\frac{p}{\beta}\right)}}\left(\int_\Omega |u_\nu-u|^{\frac{p}{p-\beta}}\,dx\right)^{\frac{1}{\left(\frac{p}{p-\beta}\right)}}\\
&= \lim_{\nu\longrightarrow+\infty}a_2\,|\nabla u_\nu|^\beta_{L^p(\Omega)}\,|u_\nu-u|_{L^{\frac{p}{p-\beta}}(\Omega)}\\
&= \lim_{\nu\longrightarrow+\infty}a_2\,|u_\nu|^\beta_{W_0^{1,p}(\Omega)}\,|u_\nu-u|_{L^{\frac{p}{p-\beta}}(\Omega)}=0
\end{aligned}$$

Y así, de los resultados obtenidos se observa que cada sumando I_1, I_2 y I_3 tiende a cero

$$\lim_{\nu \longrightarrow +\infty} \int_{\Omega} f\left(x, u_\nu, \nabla u_\nu\right)\left(u_\nu - u\right) dx = 0 \tag{3.14}$$

De la ecuación (3.7) aplicado a u_ν donde $v = u_\nu - u$ se tiene

$$\int_{\Omega} \left|\nabla u_\nu\right|^{p-2} \nabla u_\nu . \nabla\left(u_\nu - u\right) dx + \mu \int_{\Omega} \left|\nabla u_\nu\right|^{q-2} \nabla u_\nu . \nabla\left(u_\nu - u\right) dx$$

$$- \int_{\Omega} f\left(x, u_\nu, \nabla u_\nu\right)\left(u_\nu - u\right) dx = 0$$

Tomando en cuenta (3.10) y (3.14) podemos inferir

$$\limsup_{\nu \longrightarrow +\infty} \left\langle A u_\nu, u_\nu - u\right\rangle = \limsup_{\nu \longrightarrow +\infty} \left\langle -\Delta_p u_\nu - \mu \Delta_q u_\nu - N\left(u_\nu\right), u_\nu - u\right\rangle$$

$$= \limsup_{\nu \longrightarrow +\infty} \left[\int_{\Omega} \left|\nabla u_\nu\right|^{p-2} \nabla u_\nu . \nabla\left(u_\nu - u\right) dx + \mu \int_{\Omega} \left|\nabla u_\nu\right|^{q-2} \nabla u_\nu . \nabla\left(u_\nu - u\right) dx\right.$$

$$\left. \overbrace{- \int_{\Omega} f\left(x, u_\nu, \nabla u_\nu\right)\left(u_\nu - u\right) dx}^{\textit{tiende a cero}} \right] \leq 0$$

Considerando los extremos

$$\limsup_{\nu \longrightarrow +\infty} \left\langle -\Delta_p u_\nu - \mu \Delta_q u_\nu, u_\nu - u\right\rangle \leq 0$$

Luego, el operador $-\Delta_p - \mu\Delta_q$ cumple la condición $(S)_+$ en el espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ debido a la propiedad (2.8.1c.) y así pasamos de la convergencia débil a la convergencia fuerte $u_\nu \longrightarrow u$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Eso asegura que $A(u_\nu) \longrightarrow A(u)$ en $W^{-1,p'}(\Omega)$ y esto garantiza que el operador A es pseudomonótono.

Afirmación 6. *El operador A es coercivo, es decir*

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} \frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|} = +\infty$$

En efecto, de la ecuación (3.4)

$$\begin{aligned} \lambda_{1,p} &\leq \frac{\left|\nabla u\right|^p_{L^p(\Omega)}}{\left|u\right|^p_{L^p(\Omega)}}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq 0 \\ \lambda_{1,p} \left|u\right|^p_{L^p(\Omega)} &\leq \left|\nabla u\right|^p_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{aligned}$$

$$- \left|u\right|^p_{L^p(\Omega)} \geq -\frac{1}{\lambda_{1,p}} \left|\nabla u\right|^p_{L^p(\Omega)} \tag{3.15}$$

*Y por la hipótesis **(H2)** tenemos*

$$\langle Au, u\rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u.\nabla u dx + \mu \int_{\Omega} |\nabla u|^{q-2} \nabla u.\nabla u dx - \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u)\, u dx$$

$$= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p} dx + \mu \int_{\Omega} |\nabla u|^{q} dx - \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u)\, u dx$$

$$= |\nabla u|^{p}_{L^p(\Omega)} + \mu\, |\nabla u|^{q}_{L^q(\Omega)} - \underbrace{\int_{\Omega} f(x, u, \nabla u)\, u dx}_{(\Diamond)}$$

Analizando en $(\Diamond)$, *para* $\omega \in L^1(\Omega)$ *y* $\lambda_{1,p}^{-1} d_1 + d_2 < 1$

$$f(x, u, \nabla u)\,.u \leq \omega(x) + d_1 |u(x)|^p + d_2 |\nabla u(x)|^p$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x))\,.u(x)\, dx &\geq -\int_{\Omega} \omega(x)\, dx - \int_{\Omega} d_1 |u(x)|^p dx - \int_{\Omega} d_2 |\nabla u(x)|^p dx \\ &\geq -\int_{\Omega} |\omega(x)|\, dx - d_1 |u|^p_p - d_2 |\nabla u|^p_p \\ &\geq -|\omega|_{L^1(\Omega)} - d_1 |u|^p_p - d_2 |\nabla u|^p_p \end{aligned}$$

por la ecuación (3.15)

$$\begin{aligned} &\geq -|\omega|_{L^1(\Omega)} - \frac{d_1}{\lambda_{1,p}} |\nabla u|^p_p - d_2 |\nabla u|^p_p \\ &\geq -|\omega|_{L^1(\Omega)} - \left(\frac{d_1 + d_2.\lambda_{1,p}}{\lambda_{1,p}}\right) |\nabla u|^p_p \end{aligned}$$

Tomando extremos

$$\begin{aligned} \langle Au, u\rangle &\geq |\nabla u|^{p}_{L^p(\Omega)} + \mu\, |\nabla u|^{q}_{L^q(\Omega)} - |\omega|_{L^1(\Omega)} - \left(\frac{d_1 + d_2.\lambda_{1,p}}{\lambda_{1,p}}\right) |\nabla u|^p_p \\ &\geq \left(1 - \frac{d_1 + d_2.\lambda_{1,p}}{\lambda_{1,p}}\right) |\nabla u|^p_p - |\omega|_{L^1(\Omega)} \\ &= \left(1 - \frac{d_1 + d_2.\lambda_{1,p}}{\lambda_{1,p}}\right) \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - |\omega|_{L^1(\Omega)} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$-\frac{|\omega|_{L^1(\Omega)}}{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} + \left(1 - \frac{d_1 + d_2.\lambda_{1,p}}{\lambda_{1,p}}\right) \|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}}, \quad para \ \ u \neq 0, \ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

$\Rightarrow$ *Tomando límite*

$$\underbrace{-\lim_{\|u\|\longrightarrow+\infty}\frac{|\omega|_{L^1(\Omega)}}{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}}}_{\longrightarrow 0}+\underbrace{\left(1-\frac{d_1+d_2.\lambda_{1,p}}{\lambda_{1,p}}\right)}_{>0}\underbrace{\lim_{\|u\|\longrightarrow+\infty}\|u\|^{p-1}}_{\longrightarrow +\infty}\leq\lim_{\|u\|\longrightarrow+\infty}\frac{\langle Au,u\rangle}{\|u\|}$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{\|u\|\longrightarrow+\infty}\frac{\langle Au,u\rangle}{\|u\|}=+\infty$$

Se sigue que el operador A es coercivo.

Así, hemos demostrado que el operador $A: W_0^{1,p}(\Omega)\longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ es pseudo-monótono, acotado y coercivo, por lo tanto, aplicando el teorema (3.0.1), existe al menos un elemento $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $Au=0$, es decir u es una solución débil del problema (3.7), el cual completa la prueba de existencia. ■

3.3. Unicidad de la solución

En la unicidad de la solución del problema (3.5) se necesita hipótesis fuertes (ver [19] para el caso en el que f no dependa del gradiente ∇u). Las hipótesis son:

$(U)(a)$ existe una constante $b_1\geq 0$ tal que

$$(f(x,s,\xi)-f(x,t,\xi))(s-t)\leq b_1|s-t|^2 \text{ c.t.p } x\in\Omega,\quad \forall\xi\in\mathbb{R}^N,\quad \forall s,t\in\mathbb{R};$$

$(U)(b)$ existe una función $r\in L^\delta(\Omega)$, con $\delta\in[1,p^*[$, y una constante $b_2\geq 0$ tal que la función $f(x,s,.)-r(x)$ es lineal y

$$|f(x,s,\xi)-r(x)|\leq b_2|\xi| \text{ c.t.p } x\in\Omega,\quad \forall(s,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N.$$

Teorema 3.3.1. *Supongamos que se cumplen las hipótesis* ***(H1)***, ***(H2)***, $(U)(a)$ *y* $(U)(b)$.

(i) Si $p=2>q>1$ y $b_1\lambda_{1,2}^{-1}+b_2\lambda_{1,2}^{-\frac{1}{2}}<1$, entonces la solución del problema (3.5) es única para cada $\mu>0$.

(ii) Si $p>q=2$, entonces la solución del problema (3.5) es única para cada $\mu>b_1\lambda_{1,2}^{-1}+b_2\lambda_{1,2}^{-\frac{1}{2}}$.

Demostración:

Considerando que se verifican **(H1)** y **(H2)**, aplicando el teorema (3.2.1) existe $u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solución débil del problema (3.5) para cada $\mu > 0$.

$$-\Delta_p u_1 - \mu \Delta_q u_1 = f(x, u_1, \nabla u_1)$$

Suponiendo que $u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es otra solución del problema (3.5).

$$-\Delta_p u_2 - \mu \Delta_q u_2 = f(x, u_2, \nabla u_2)$$

Restando las ecuaciones se tiene

$$\begin{aligned}
(-\Delta_p u_1 - \mu \Delta_q u_1) - (-\Delta_p u_2 - \mu \Delta_q u_2) &= f(x, u_1, \nabla u_1) - f(x, u_2, \nabla u_2) \\
(-\Delta_p u_1 + \Delta_p u_2) + \mu(-\Delta_q u_1 + \Delta_q u_2) &= f(x, u_1, \nabla u_1) - f(x, u_2, \nabla u_2)
\end{aligned}$$

Aplicando este resultado a la función $(u_1 - u_2) \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\langle -\Delta_p u_1 + \Delta_p u_2 + \mu(-\Delta_q u_1 + \Delta_q u_2), u_1 - u_2 \rangle = \langle f(x, u_1, \nabla u_1) - f(x, u_2, \nabla u_2), u_1 - u_2 \rangle \tag{3.16}$$

i) Para el caso $p = 2$ en la ecuación anterior

$$\begin{gathered}
\langle -\Delta_p u_1 + \Delta_p u_2, u_1 - u_2 \rangle + \langle \mu(-\Delta_q u_1 + \Delta_q u_2), u_1 - u_2 \rangle \\
= \langle f(x, u_1, \nabla u_1) - f(x, u_2, \nabla u_2), u_1 - u_2 \rangle \\
\underbrace{\langle -\Delta u_1 + \Delta u_2, u_1 - u_2 \rangle}_{\textbf{(I)}} + \underbrace{\langle \mu(-\Delta_q u_1 + \Delta_q u_2), u_1 - u_2 \rangle}_{\textbf{(II)}} \qquad (3.17) \\
= \underbrace{\langle f(x, u_1, \nabla u_1) - f(x, u_2, \nabla u_2), u_1 - u_2 \rangle}_{\textbf{(III)}}
\end{gathered}$$

Revisando en cada caso, empezamos con (**I**)

$$\begin{aligned}
\langle -\Delta u_1 + \Delta u_2, u_1 - u_2 \rangle &= \int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \, dx && (3.18) \\
&= |\nabla(u_1 - u_2)|_2^2 && (3.19)
\end{aligned}$$

Para el sumando (**II**) con $\mu > 0$, $p = 2 > q > 1$, con $-\Delta_q$ operador monótono

$$\langle \mu(-\Delta_q u_1 + \Delta_q u_2), u_1 - u_2 \rangle \geq 0 \tag{3.20}$$

Ahora veamos (**III**)

$$\langle f(x,u_1,\nabla u_1)-f(x,u_2,\nabla u_2),u_1-u_2\rangle=\int_\Omega (f(x,u_1,\nabla u_1)-f(x,u_2,\nabla u_2)).(u_1-u_2)\,dx$$

$$=\int_\Omega f(x,u_1,\nabla u_1).(u_1-u_2)\,dx-\int_\Omega f(x,u_2,\nabla u_2).(u_1-u_2)\,dx$$

Sumando y restando

$$\int_\Omega f(x,u_2,\nabla u_1).(u_1-u_2)\,dx$$

a la expresión anterior y agrupando convenientemente

$$=\underbrace{\int_\Omega (f(x,u_1,\nabla u_1)-f(x,u_2,\nabla u_1)).(u_1-u_2)\,dx}_{\text{parte 1}}$$

$$+\underbrace{\int_\Omega (f(x,u_2,\nabla u_1)-f(x,u_2,\nabla u_2)).(u_1-u_2)\,dx}_{\text{parte 2}}$$

En la parte 1 aplicamos la hipótesis $(U)(a)$, existe una constante $b_1\geq 0$ tal que

$$\int_\Omega \left(f\left(x,\underbrace{u_1},\nabla u_1\right)-f\left(x,\underbrace{u_2},\nabla u_1\right)\right).(u_1-u_2)\,dx$$

$$\leq\int_\Omega b_1\left|u_1(x)-u_2(x)\right|^2dx\;\;\text{c.t.p. } x\in\Omega,\;\nabla u_1\in\mathbb{R}^N$$

$$\leq b_1\left|u_1-u_2\right|_2^2$$

Entonces

$$\int_\Omega \left(f\left(x,\underbrace{u_1},\nabla u_1\right)-f\left(x,\underbrace{u_2},\nabla u_1\right)\right).(u_1-u_2)\,dx\leq b_1\left|u_1-u_2\right|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (3.21)$$

Así mismo, en la parte 2, de la condición $(U)(b)$ existe una función $r\in L^\delta(\Omega)$ y una constante $b_2\geq 0$ tal que

$$T(\theta)=f(x,u_2,\theta)-r(x),\text{ es lineal para }\theta\in\mathbb{R}^N$$

$$T(\alpha(\xi-\eta))=f(x,u_2,\alpha(\xi-\eta))-r(x),\quad\alpha\in\mathbb{R},\;\;\forall\xi,\eta\in\mathbb{R}^N$$

$$\begin{aligned}\alpha T(\xi-\eta)&=\alpha f(x,u_2,\xi-\eta)-r(x)\\&=\alpha(f(x,u_2,\xi)-r(x)-f(x,u2,\eta)+r(x))-r(x)\\&=\alpha(f(x,u_2,\xi)-f(x,u_2,\eta))-r(x)\end{aligned}$$

Haciendo $\alpha = u_1(x) - u_2(x) \in \mathbb{R}$ en la expresión anterior

$$(f(x, u_2, \nabla u_1) - f(x, u_2, \nabla u_2)) \,.\, (u_1(x) - u_2(x))$$

$$= (u_1(x) - u_2(x)) \,.\, f(x, u_2, \nabla u_1 - \nabla u_2)$$

$$= (u_1(x) - u_2(x)) \,.\, f(x, u_2, \nabla (u_1 - u_2))$$

$$= f(x, u_2, (u_1(x) - u_2(x)) \,.\, \nabla (u_1 - u_2)) - r(x)$$

Además, sabiendo que: $u(x) \,.\, \frac{\partial}{\partial x} u(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u(x))^2$.

Luego

$$(u_1(x) - u_2(x)) \,.\, \nabla (u_1 - u_2) = (u_1(x) - u_2(x)) \,.\, \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (u_1 - u_2), ..., \frac{\partial}{\partial x_N} (u_1 - u_2) \right)$$

$$= \left((u_1(x) - u_2(x)) \frac{\partial}{\partial x_1} (u_1 - u_2), ..., (u_1(x) - u_2(x)) \frac{\partial}{\partial x_N} (u_1 - u_2) \right)$$

$$= \left((u_1(x) - u_2(x)) \frac{\partial}{\partial x_1} (u_1 - u_2), ..., (u_1(x) - u_2(x)) \frac{\partial}{\partial x_N} (u_1 - u_2) \right)$$
$$= \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} (u_1 - u_2)^2, ..., \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_N} (u_1 - u_2)^2 \right)$$
$$= \nabla \left(\frac{1}{2} (u_1 - u_2)^2 \right)$$

entonces

$$(u_1(x) - u_2(x)) \,.\, \nabla (u_1 - u_2) = \nabla \left(\frac{1}{2} (u_1 - u_2)^2 \right)$$

Reemplazando se tiene

$$f(x, u_2, (u_1(x) - u_2(x)) \,.\, \nabla (u_1 - u_2)) - r(x) = f\left(x, u_2, \nabla \left(\frac{1}{2} (u_1 - u_2)^2 \right) \right) - r(x)$$

Retomando la parte 2

$$\begin{aligned} \int_\Omega (f(x, u_2, \nabla u_1) - f(x, u_2, \nabla u_2)) \,.\, (u_1 - u_2)\, dx &= \int_\Omega \left(f\left(x, u_2, \nabla \left(\frac{1}{2} (u_1 - u_2)^2 \right) \right) - r(x) \right) dx \\ &\leq \int_\Omega b_2 \left| \nabla \left(\frac{1}{2} (u_1 - u_2)^2 \right) \right| dx \\ &= b_2 \int_\Omega |u_1(x) - u_2(x)| \,.\, |\nabla (u_1 - u_2)|\, dx \end{aligned}$$

Por desigualdad de Holder

$$
\begin{aligned}
&\leq b_2 \left(\int\limits_{\Omega} |u_1(x) - u_2(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla (u_1 - u_2)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq b_2 \underbrace{|u_1 - u_2|_{L^2(\Omega)}} |\nabla (u_1 - u_2)|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

como por hipótesis $\lambda_{1,p} |u|^p_{L^p(\Omega)} \leq |\nabla u|^p_{L^p(\Omega)}, \ \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *entonces para* $p = 2$*, se tiene* $\lambda_{1,2} |u|^2_{L^2(\Omega)} \leq |\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}, \ \Rightarrow$ *sacando raíz cuadrada*

$$
|u_1 - u_2|_{L^2(\Omega)} \leq \lambda_{1,2}^{-\frac{1}{2}} |\nabla (u_1 - u_2)|_{L^2(\Omega)},
$$

reemplazando en la desigualdad anterior

$$
\begin{aligned}
&\leq b_2 \lambda_{1,2}^{-\frac{1}{2}} |\nabla (u_1 - u_2)|_{L^2(\Omega)} . |\nabla (u_1 - u_2)|_{L^2(\Omega)} \\
&= b_2 \lambda_{1,2}^{-\frac{1}{2}} |\nabla (u_1 - u_2)|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

Y así

$$
\int\limits_{\Omega} (f(x, u_2, \nabla u_1) - f(x, u_2, \nabla u_2)) . (u_1 - u_2) \, dx \leq b_2 \lambda_{1,2}^{-\frac{1}{2}} |\nabla (u_1 - u_2)|^2_{L^2(\Omega)} \quad (3.22)
$$

De los resultados (3.18), (3.20), (3.21) y (3.22) reemplazando en la ecuación (3.17)

$$
\begin{aligned}
|\nabla (u_1 - u_2)|^2_{L^2(\Omega)} &\leq b_1 |u_1 - u_2|^2_{L^2(\Omega)} + \int\limits_{\Omega} \left(f\left(x, u_2, \nabla \left(\frac{1}{2} (u_1 - u_2)^2 \right) \right) - r(x) \right) dx \\
&\leq b_1 |u_1 - u_2|^2_{L^2(\Omega)} + b_2 \lambda_{1,2}^{-\frac{1}{2}} |\nabla (u_1 - u_2)|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq b_1 \lambda_{1,2}^{-1} |\nabla (u_1 - u_2)|^2_{L^2(\Omega)} + b_2 \lambda_{1,2}^{-\frac{1}{2}} |\nabla (u_1 - u_2)|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left(b_1 \lambda_{1,2}^{-1} + b_2 \lambda_{1,2}^{-\frac{1}{2}} \right) |\nabla (u_1 - u_2)|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

entonces

$$
|\nabla (u_1 - u_2)|^2_{L^2(\Omega)} \underbrace{\left(1 - b_1 \lambda_{1,2}^{-1} - b_2 \lambda_{1,2}^{-\frac{1}{2}} \right)}_{>0} \leq 0
$$

$$
\Rightarrow |\nabla (u_1 - u_2)|^2_{L^2(\Omega)} = 0 \ \Rightarrow \ \nabla (u_1 - u_2) = 0 \ \Rightarrow \ u_1 - u_2 = 0 \ \Rightarrow \ u_1 = u_2.
$$

ii) Para el caso $p > q = 2$, y usando algunos resultados de la parte $i)$

$$
\langle -\Delta_p u_1 + \Delta_p u_2 + \mu (-\Delta_q u_1 + \Delta_q u_2), u_1 - u_2 \rangle = \langle f(x, u_1, \nabla u_1) - f(x, u_2, \nabla u_2), u_1 - u_2 \rangle
$$

$$\underbrace{\langle -\Delta_p u_1 + \Delta_p u_2, u_1 - u_2 \rangle} + \langle \mu \left(-\Delta_q u_1 + \Delta_q u_2 \right), u_1 - u_2 \rangle = \langle f\left(x, u_1, \nabla u_1\right) - f\left(x, u_2, \nabla u_2\right), u_1 - u_2 \rangle$$

como el operador $-\Delta_p$ es monótono entonces

$$\mu \int_\Omega \left|\nabla \left(u_1 - u_2\right)\right|^2 dx \leq \underbrace{\langle -\Delta_p u_1 + \Delta_p u_2, u_1 - u_2 \rangle} + \mu \int_\Omega \left|\nabla \left(u_1 - u_2\right)\right|^2 dx$$

$$= \langle f\left(x, u_1, \nabla u_1\right) - f\left(x, u_2, \nabla u_2\right), u_1 - u_2 \rangle$$

$$\Rightarrow \qquad \mu \left|\nabla \left(u_1 - u_2\right)\right|^2_{L^2(\Omega)} \leq \langle f\left(x, u_1, \nabla u_1\right) - f\left(x, u_2, \nabla u_2\right), u_1 - u_2 \rangle$$

$$\mu \left|\nabla \left(u_1 - u_2\right)\right|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_\Omega \left(f\left(x, u_1, \nabla u_1\right) - f\left(x, u_2, \nabla u_2\right)\right). \left(u_1 - u_2\right) dx$$

de (3.21) y (3.22) se tiene

$$\leq b_1 \lambda_{1,2}^{-1} \left|\nabla \left(u_1 - u_2\right)\right|^2_{L^2(\Omega)} + b_2 \lambda_{1,2}^{-\frac{1}{2}} \left|\nabla \left(u_1 - u_2\right)\right|^2_{L^2(\Omega)}$$

entonces con $\mu > 0$

$$\mu \left|\nabla \left(u_1 - u_2\right)\right|^2_{L^2(\Omega)} \leq \left(b_1 \lambda_{1,2}^{-1} + b_2 \lambda_{1,2}^{-\frac{1}{2}}\right) \left|\nabla \left(u_1 - u_2\right)\right|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\left(\mu - b_1 \lambda_{1,2}^{-1} - b_2 \lambda_{1,2}^{-\frac{1}{2}}\right) \left|\nabla \left(u_1 - u_2\right)\right|^2_{L^2(\Omega)} \leq 0$$

Para $\mu - b_1 \lambda_{1,2}^{-1} - b_2 \lambda_{1,2}^{-\frac{1}{2}} > 0$ se concluye que $u_1 = u_2$, y eso demuestra que la solución del problema (3.5) tiene solución única. ■

Capítulo 4

Algoritmo de Aproximación Numérica de la Solución

En este capítulo, implementaremos un algorítmo numérico para nuestra ecuación (3.5), con $\mu = 0$, $p = q = 4$, $f(x, u, \nabla u) = |u|^3 u$ y $\Omega =]0,1[\times]0,1[$.

Aplicaremos el método de Newton-Raphson para resolver la ecuación

$$\langle J'(u), u\rangle = 0, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

donde

$$\begin{aligned} J : & W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ u & \longmapsto J(u) = \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla u|^4 \, dx - \frac{1}{5}\int_\Omega |u|^5 \, dx \end{aligned}$$

es el funcional de energía asociado a nuestro problema (particularizado)

$$\left| \begin{array}{rcll} -\Delta_4 u & = & |u|^3 u & \text{en } \Omega \\ u & = & 0 & \text{en } \Gamma \end{array} \right. \tag{4.1}$$

El método de Newton-Raphson es una de las herramientas más efectivas para hallar las raíces de la ecuación $h(x) = 0$, mediante las aproximaciones sucesivas

$$x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)} \tag{4.2}$$

El siguiente teorema nos muestra condiciones suficientes para el cual el Método de Newton converge a la solución de la ecuación $h(x) = 0$.

4.0.1. Newton-Raphson

Teorema 4.0.1. ***(Teorema 2.6 ver [21])***
Sea $f \in C^2([a,b])$. *Si* $p \in [a,b]$ *es tal que* $f(p) = 0$ *y* $f'(p) \neq 0$, *entonces existe* $\delta > 0$ *tal que el método de Newton genera una sucesión* $(p_n)_{n \geq 1}$ *que converge a* p *para cualquier aproximación inicial* $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$.

Demostración.- Ver [21]
En relación a (4.1) usaremos el método de Newton para hallar los puntos críticos del funcional J, esto es, resolveremos la ecuación

$$0 = \langle J'(u), u \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^4 \, dx - \int_{\Omega} |u|^5 \, dx, \quad \text{en } \Omega =]0,1[\times]0,1[$$

por medio de la aproximación (4.2).

Para esto usaremos una malla regular $\Omega \subseteq \overline{\Omega}$, y representremos con u un arreglo de números reales coincidiendo con u sobre Ω.

4.1. Algoritmo

1. Definir la región Ω y el tamaño de paso δ.

2. Inicializar u_0 con una aproximación inicial adecuada.

3. Inicio bucle $i = 0$ hasta n (número de nodos de la malla).

Inicio bucle $j = 0$ hasta n.

3.1 Calcular $J'(u(i,j))$, $J''(u(i,j))$.

3.2 Evaluar

$$u^{n+1}(i,j) = u^n(i,j) - \delta \frac{J'(u(i,j))}{J''(u(i,j))},$$

repita el paso (3.2) hasta que se cumplan los criterios de convergencia

$$\left| u^{n+1}(i,j) - u^n(i,j) \right| \approx 0.$$

Fin de bucle i

Fin de bucle j

Capítulo 5

Conclusiones

1) En el presente trabajo se ha usado una generalización de la teoría de operadores monótonos, para probar la existencia de solución débil de una ecuación elíptica no lineal con un término de fuerza no lineal convectivo, lo que muestra la gran aplicabilidad de esta teoría a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales no lineales. En este sentido, una primera conclusión al respecto es la eficacia de esta metodología en la prueba de existencia de soluciones para problemas elípticos no lineales. Por ejemplo; adaptar la metodología estudiada para resolver problemas del tipo (p(x),q(x))-Laplaciano, un operador en espacios de Sobolev de exponente variable con la fuente convectiva en los espacios mencionados:

$$\left| \begin{array}{cc} -\Delta_{p(x)}u - \mu\Delta_{q(x)}u = f(x, u, \nabla u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

donde $-\Delta_{p(x)}u = div\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right)$

2) Se ha impuesto condiciones adecuadas de crecimiento y de monotonía sobre el término convectivo no lineal, además, de restringir los coeficientes de monotonía y cremiento (b_1, b_2) relacionados con el primer autovalor λ_1 (del $-\Delta_p$) para obtener resultados de unicidad. Consideramos que estas condiciones pueden ser generalizadas o debilitadas en un trabajo posterior. Así, la unicidad depende de la relación entre los parámetros involucrados en el término convectivo y el primer autovalor del operador $-\Delta_p$.

3) No se ha investigado las propiedades asintóticas del problema cuando el paráme-

tro $\mu \longrightarrow 0$ o cuando $\mu \longrightarrow +\infty$, pero es posible demostrar que existe los puntos de convergencia que son soluciones del problema cuando $\mu = 0$.

4) Se puede ampliar el estudio implementando la metodología del trabajo a otro tipo de problemas similares, por ejemplo; con el bilaplaciano $\Delta_p^2 + \Delta_q^2$ con término convectivo adecuado, estudiar problemas similiares pero con condición no homogénea y condicion de Dirichlet - Newman en la frontera, problemas elípticos de transmisión, etc.

5) Se ha elaborado una aplicación para hallar los puntos críticos del funcional de energía del problema usando el método de Newton-Raphson para obtener la aproximación a dichos puntos críticos, proponiendo un algoritmo numérico.

Bibliografía

[1] H. Brézis, Analyse Fonctionnelle, Masson, Paris,1983.

[2] D. Motreanu, V.V. Motreanu, N. Papageorgiou, Topological and Variational Methods with Aplications to Nonlinear Boundary Value Problems, Springer, New York. 2014.

[3] A. Le, Eigenvalue problems for the p-Laplacian, Nonlinear Analysis, 64, No. 5 (2006), 1057-1099.

[4] A. Szulkin, M. Willem, Eigenvalue problems with indefinite weight, Studia Math. 135(1999), 191-201

[5] St. Cirstea, F.-C., Radulescu, V.D.: On a double bifurcation quasilinear problem arising in the study of anisotropic continuous media. Proc. Edinb. Math. Soc. 44. 527-548 (2001)

[6] Guo, Z., Webb, J.L.R.: Large and small solutions of a class of quasilinear elliptic eigenvalue problems. J. Differ. Equ. 180, 1-50 (2002).

[7] Benci, V., Fortunato, D., Pisani, L.: Soliton like solutions of a Lorentz invariant equation in dimension 3. Rev. Math. Phys. 10, 315-344 (1998).

[8] G. B. Li, The existence of a nontrivial solution to the p-q-Laplacian problem with nonlinearity asymptotic to at infinity in , Nonlinear Analysis, 68 (2008), 1100-1119

[9] H. Yin, Z. Yang, A class of (p,q)-Laplacian type equation with concave-convex nonlinearities in bounded domain, J. Math. Anal. Appl., 382(2011), 843-855.

[10] G. Li, G. Zhang, Multiple solutions for the p-q-Laplacian problems with critical exponent, Acta Mathematica Scientia, 29B, No.4 (2009), 903-918.

[11] S.A. Marano, S.J.N. Mosconi, N.S. Papageorgiou, Multiple solutions to problems with resonant concave nonlinearity, Adv. Nonlinear Stud. 16 (2016) 51-65.

[12] E. Cabanillas, W. Barahona, E. Trujillo, Existence of solutions for a nonlocal Laplacian equation with dependence on the gradient. Gulf Jour. Math. Vol 5, (2017) 18-31

[13] D. Mugnai, N.S. Papageorgiou, Wang's multiplicity result for superlinear without the Ambrosetti-Rabinowitz conditions, Trans. Amer. Math. Soc. 366 (2014) 4919-4937.

[14] D. Averna, D. Motreanu, E. Tornatore, Existence and asymptotic properties for quasilinear elliptic equations with gradient dependence, Applied Mathematics Letters, (2016).

[15] R. Aris, Mathematical modelling techniques, Research Notes in Mathematics, 24.Pitman (Advance Publishing Program) Boston, Mass-London, 1979.

[16] P.C. Fife, Mathematical aspects of reacting and difusing systems, Lecture Notes in Biomathematics,28. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.

[17] H.Wilhelmsson, Explosive instabilities of reaction-diffusion equations. Phys. Rev. A, (3) no. 2, (1987),965-966.

[18] E.Zeidler,Nonlinear functional Analysis and its Applications II/B: Nonlinear Monotone Operators.Springer-Verlag New York 1990

[19] V.V. Motreanu, Uniqueness result for a Dirichlet problem with variable exponent, Commun. Pure Appl. Anal. 9 (2010) 1399-1410.

[20] G. A. Afrouzi, Z. Naghizadeh, S. Mahdavi, A numerical algorithm for finding solution of p-Laplacian Dirichlet problems, Applied Mathematics and Computation (2007).

[21] R. L. Burden, J. D. Faires, Numerical Analisis, PWS-Kent, 1989.

[22] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, 1987.